נושאים נבחרים בהסתברות - 106935

מבנים אקראיים פריקים

מרצה: ברוך גרנובסקי.

סיפרות:

Arratia, R., Barbour, A. and Tavaré, S. (2004). Logarithmic combinatorial structures: a probabilistic approach.

Kolchin, V. (1999). Random graphs. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge Univ. Press.

Freiman, G., Granovsky, B.(2004) Clustering in coagulation-fragmentation processes, random combinatorial structures and additive number systems:Asymtotic formulae and limiting laws, Tr.AMS,v.357,6,

Granovsky, B., Stark, D. (2006) Asymptotic enumeration and logical limit laws for expansive multisets and selections, J. London Math.Soc.,(2),73.

מבוא: חלוקות של מספר טבעי

הגדרה 1. לחלוקה של מספר $n \in N^+ := \{0, 1, 2, \ldots, \}$ קוראים וקטור

$$\eta = (k_1, \ldots, k_n) : \sum_{j=1}^{n} jk_j = n, \quad k_j \in N^+.$$

ל-$|\eta| := k_1 + \ldots + k_n$ קוראים מספר מחוברים (= קבוצות)
ב- η ול-$\Omega_n = \{\eta\}$ קוראים מרחב חלוקות של n.
דוגמא: $10 = 3 + 3 + 1 + 3 = 2 + 4 + 4$ כאן:

$$\eta_1 = (1, 0, 3, 0, \ldots, 0) = 1^1 3^3 \in \Omega_{10}$$

$$\eta_2 = (0, 1, 0, 2, 0, \ldots, 0) = 2^1 4^2 \in \Omega_{10}.$$

תאור גאומטרי של החלוקות ניתן ע"י דיאגרמות $Young$.
כאן $\zeta \in \Omega_n$ מיוצגת ע"י וקטור

$$\zeta = (l_1, \ldots, l_m) : l_1 \geq \ldots \geq l_m > 0 : l_1 + \ldots l_m = n.$$

ומתקיים:
$m = |\zeta|$- אורך העמודה הראשונה.

נסמן: $p_n := |\Omega_n|$ מספר כולל של חלוקות של n.
טענה: (פ' יוצרת חלוקות של $Euleur$.)

$$g(x) := \sum_{n\geq 0} p_n x^n = \prod_{j\geq 1}(1-x^j)^{-1},\ |x|<1,\ p_0=1.$$

הוכחה:

$$g(x) = \prod_{j\geq 1}\sum_{k\geq 0} x^{jk} := \sum_{n\geq 0} c_n x^n. \quad (1)$$

סימן:

$$[x^n]g(x) = c_n$$

לפי (1),

$$[x^n]g(x) = [x^n]\prod_{j=1}^{n}\sum_{k\geq 0} x^{jk} =$$

$$[x^n]\Big(\sum_{k_1\geq 0,\ldots,k_n\geq 0} x^{1k_1+2k_2+\ldots+nk_n}\Big) = \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\Omega_n} \mathbf{1} =$$

$$p_n.$$

מבנים פריקים

נתבונן במבנים כך שכול מבנה מגודל n הוא איחוד של n מבנים אי-פריקים שגודלם $k_1,\ldots,k_n$, כלומר

$$n = \sum_{j=1}^{n} jk_j.$$

<u>מאפיינים בסיסיים של מבנה פריק</u>

π_n- מבנה פריק מגודל n;
p_n -מספר מבנים פריקים מגודל n;
m_j-מספר מצבים (=סוגים) של מבנה אי-פריק מגודל j;
$\eta = (k_1,\ldots,k_n)\in\Omega_n$ - ספקטרום(=ספקטרום מניות) של מבנה נתון π_n.

הערה: קיימת ההתאמה $\boxed{\text{מבנה } \pi_n}$ $\longleftarrow$ $\boxed{\text{ספקטרום } \eta\in\Omega_n}$ שהיא בדרך כלל לא חד חד ערכית.

דוגמאות:
א. <u>תמורות על</u> $[n] = \{1,2,\ldots,n\}$.

$$S_n = \{\pi_n\},\ |S_n| = n!$$

- אוסף של כל התמורות(= מבנים) $\pi_n = (\pi_n(1),\ldots,\pi_n(n))$.

כל תמורה ניתן לרשום כאיחוד של מעגלים כדלקמן: מעגל ראשון מתחיל מ-1, אחרי 1 בא מספר $\pi_n(1)$, אחריו $\pi_n(\pi_n(1))$ וכו'. אחרי שהמעגל הראשון מסתיים, מתחילים מעגל חדש מהמספר הקטן ביותר בין המספרים שנותרו,וכך הלאה. למשל,

$$\pi_8 = (84357612) = (182457)(3)(6)$$

-הצגה מעגלית של ה-π_8.
כאן מעגלים הם מבנים(= רכיבים) אי- פריקים,
כך ש- $m_j = (j-1)!$- מספר המעגלים מגודל j.
מספר $N(k_1, \ldots, k_n)$ תמורות π_n בעלות אותו
ספקטרום $\eta = (k_1, \ldots, k_n) \in \Omega_n$ ניתן ע"י נוסחת
קושי($Cauchy$):

$$N(k_1, \ldots, k_n) = n! \prod_{j=1}^{n} \Big(\frac{1}{j}\Big)^{k_j} \frac{1}{(k_j)!}.$$

הוכחה(רמז): נוסחת מולטינום ו-$m_j = (j-1)!$.
תרגיל:

$$\pi_8 = (84357612) = (182457)(3)(6) \to$$

$$\eta = (2, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0).$$

נמצא $N(2, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$. לפי נוסחת קושי,

$$N(2, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) = 8! \Big(1^2 \frac{1}{2!} \frac{1}{6} \cdot 1\Big)$$

$$= 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 3360.$$

הדמיה של תמורה אקראית ב-S_n :

מספר 1 מתחיל מעגל ראשון.מספר 2 תופס מקום מימינו של 1 (=מצטרף למעגל ראשון) בהסתברות $1/2$ ובהסתברות $1/2$ מתחיל מעגל חדש. התהליך נמשך כך שמספר k מתחיל מעגל חדש בהסתברות $1/k$ או באותה הסתברות $1/k$ הוא תופס מקום מימינו של כל אחד מ- $(k-1)$ מספרים אשר קדמו לו. נסמן π_n התמורה האקראית שנוצרה. מתקיים

$$P(\pi_n) = 1(1/2)(1/3)\ldots(1/n) = \frac{1}{n!}.$$

ב. חלוקות משוקללות

מניחים שישנם m_j סוגים של מטבעות באותו השווי j,
כאשר $j = 1, 2, \ldots$. נתבונן בחלוקות של סכום כולל n ע"י
המטבעות הנ"ל.כאן כל חלוקה תלויה בשווים של מטבעות ובסוגם כאחד.יהי p_n -מספר החלוקות
משוקללות של n. אז פ' יוצרת של $\{p_n\}$ היא

$$g(x) = \prod_{j \geq 1} (1 - x^j)^{-m_j}, \ |x| < 1$$

ג.גרפים

כל גרף על n קודקודים(=מבנה בגודל n) מתפרק למספר גרפים קשירים(מבנים אי-פריקים)
כך ש-k_j הוא מספר הגרפים הקשירים על j קודקודים ומתקיים:

$$\eta = (k_1, \ldots, k_n) \in \Omega_n.$$

כאן

$$p_n = 2^{\binom{n}{2}}.$$

ד.פולינומים מחזקה n מעל שדה סופי $GF(q^n)$

נזכיר שאופיין(=מציין) השדה q הוא מספר ראשוני. יהי

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

פולינום מעל שדה סופי $GF(q^n)$. אזי $p_n = q^n$.

כל פולינום f הנ"ל ניתן להציג כמכפלה של פולינומים אי-פריקים ב-$GF(q^n)$, כך ש k_j הוא מספר הגורמים האי-פריקים בחזקה j ו- $\eta = (k_1, \ldots, k_n) \in \Omega_n$.

למשל, עבור $n = 6, q = 2$

$$f(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^2 + x - 1 = (x-1)^3(x+1)^3.$$

ה.תהליכים סטוכסטיים של מזוג ופירוק

n חלקיקים זהים מחולקים לקבוצות(=גבישים) כך ש- k_j מספר הקבוצות בגודל j ו-= η. $(k_1, \ldots, k_n) \in \Omega_n$

מצב המערכת בכל רגע נתון מוגדר ע"י η. הקבוצות פועלות הדדית כך שבכל רגע נתון או שלא מתרחש דבר או מתרחש <u>אחד</u> משני אירועים הבאים:

- מזוג: שתי קבוצות שגודלם i ו-j מתמזגות לקבוצה אחת שגודלה $i + j$, כלומר

$$\eta = (k_1, \ldots, k_n) \to \eta^{(i,j)} =$$

$$(k_1, \ldots, k_i - 1, \ldots, k_j - 1, \ldots, k_{i+j} + 1, \ldots, k_n).$$

- פירוק: קבוצה אחת שגודלה $i + j$ מתפרקת לשתי קבוצות שגודלם i ו-j, כלומר

$$\eta = (k_1, \ldots, k_n) \to \eta_{(i,j)} =$$

$$(k_1, \ldots, k_i + 1, \ldots, k_j + 1, \ldots, k_{i+j} - 1, \ldots, k_n).$$

בעיות אסימפטוטיות של ספירת המבנים: ניסוח

א. התנהגות אסימפטוטית של p_n כש- $n \to \infty$;

ב. תהי $A_n \subset \{\pi_n\}$ תת קבוצה מבנים נתונה,

כלומר A_n היא אוסף של מבנים π_n המקיימים תכונה מסוימת.

יש למצא התנהגות אסימפטוטית של $|A_n|$, כש- $n \to \infty$.

אחת מהשיטות היעילות לפתרון היא שיטה הסתברותית. נגדיר צפיפות של A_n ב-$\{\pi_n\}$:

$$0 \le \rho_n := \frac{|A_n|}{p_n} \le 1.$$

אם U מידה אחידה על האוסף $\{\pi_n\}$ של כל המבנים, אזי

$$\rho_n = P(A_n).$$

מבנים פריקים אקראים: הגדרה ודוגמאות

<u>הגדרה 2:</u> תהי U ההתפלגות האחידה על אוסף המבנים $\{\pi_n\}$, כלומר

$$U(\pi_n) = \frac{1}{|\{\pi_n\}|} = \frac{1}{p_n}, \quad \pi_n \in \{\pi_n\}.$$

אזי לאלמנט האקראי Π_n אשר נוצר קוראים מבנה אקראי ולו.א.

$$\mathcal{K}^{(n)} = \mathcal{K}^{(n)}(\Pi_n) = (K_1^{(n)}(\Pi_n), \ldots, K_n^{(n)}(\Pi_n)),$$

כש $K_j^{(n)}(\Pi_n)$ -מספר רכיבים אי-פריקים בגודל j
ב-Π_n, קוראים ספקטרום של מבנה אקראי Π_n.   <u>דוגמא:</u> תמורות ב-S_n.
לפי נוסחת קושי,

$$P\Big(\mathcal{K}^{(n)} = (k_1, \ldots, k_n)\Big) = \frac{N(k_1, \ldots, k_n)}{p_n} =$$

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j}\right)^{k_j} \frac{1}{(k_j)!}, \quad (k_1, \ldots, k_n) \in \Omega_n.$$

הערה: ו.א. $\mathcal{K}^{(n)}$ מקבל ערכים ב-Ω_n. לעומת זה מבנה אקראי Π_n מקבל ערכים ב-$\{\pi_n\}$.

קשר מותנה

תהי $\{Z_j,\ j \geq 1\}$ -סידרה של מ.א. ב.ת. ובעלי ערכים ב-

$$N^+ := \{0, 1, 2, \ldots, \},$$

כך ש-

$$P(Z_j = k) = a_k^{(j)}, \quad k \in N^+, \quad j \geq 1.$$

נגדיר סידרה של ו.א.

$$\{\mathcal{K}^{(n)} = (K_1^{(n)}, \ldots, K_n^{(n)}),\ n \geq 1\}$$

הנוצרת ע"י הסידרה $\{Z_j,\ j \geq 1\}$ באופן הבא:

$$\mathcal{L}(\mathcal{K}^{(n)}) = \mathcal{L}(Z_1, \ldots, Z_n | \sum_{j=1}^{n} jZ_j = n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

מתקיים:

$$P\Big(\mathcal{K}^{(n)} = (k_1, \ldots, k_n)\Big) = \frac{\prod_{j=1}^{n} a_{k_j}^{(j)}}{P(\sum_{j=1}^{n} jZ_j = n)},$$

$$\eta = (k_1, \ldots, k_n) \in \Omega_n, \quad n \geq 1.$$

נסמן

$$c_n := P(\sum_{j=1}^{n} jZ_j = n) = \sum_{\eta\in\Omega_n}\prod_{j=1}^{n} a_{k_j}^{(j)},$$
$$\eta = (k_1,\dots,k_n)$$

נגדיר עתה מידה הסתברותית μ_n על מרחב סופי Ω_n :

$$\mu_n(\eta) := c_n^{-1}\prod_{j=1}^{n} a_{k_j}^{(j)}, \quad \eta = (k_1,\dots,k_n)\in\Omega_n. \quad (2)$$

כאן c_n נקראת פונקצית חלוקה של המידה.
למידות מהצורה (2) קוראים "מולטיפליקטיויות"-
$(Vershik, 1996)$
או מידות $Gibbs$- $(Pitman, 2002)$.

מתקיים $\mu_n \Leftrightarrow \mathcal{K}^{(n)}$.
מסתבר שספקטרום של מגוון רחב מאוד של מבנים פריקים
אקראיים מתקבל ע"י סה"כ שלוש ההתפלגויות הבאות של מ.א. Z_j :
פואסוני, בינומי שלילי ובינומי.

טענה 1: תכונות כלליות של ספקטרום

א. הספקטרום $\mathcal{K}^{(n)}$ (=המידה μ_n) הוא אינוריאנטי תחת טרנספורמצית ההשפעות (= $tilting$) של מ.א. $Z_j,\ j\ge 1$:

$$a_k^{(j)}(\theta) = b_j\theta^{jk}a_k^{(j)},\ k\ge 0,\ j\ge 1,\ \theta>0$$

כש- $b_j = b_j(\theta)-$ קבוע נירמול.
ב. הצגה של $Kolchin$. יהי

$$\Omega_{n,k} := \{\eta\in\Omega_n : |\eta| = k\},\ 1\le k\le n.$$

אזי עבור כל $\eta\in\Omega_{n,k}$ מתקיים

$$P\Big(\mathcal{K}^{(n)}(\Pi_n) = \eta \big| |\eta| = k\Big) = c_{n,k}^{-1}\prod_{j=1}^{n} a_{k_j}^{(j)},$$

$$1\le k\le n, \quad (3),$$

כלומר ההסתברות המותנית הנ"ל היא מידת גיבס על $\Omega_{n,k}$ עם פונקצית חלוקה

$$c_{n,k} = \sum_{\eta\in\Omega_{n,k}}\prod_{j=1}^{n} a_{k_j}^{(j)}.$$

הוכחה: א. מידית.
ב. ההסתברות המותנית שבנידון שווה ל-

$$\frac{P\Big(\mathcal{K}^{(n)}(\Pi_n)=\eta\Big)}{P\Big(|\mathcal{K}^{(n)}(\Pi_n)|=k\Big)},$$

$$\eta \in \Omega_{n,k}. \quad (4)$$

כאן

$$P\Big(|\mathcal{K}^{(n)}(\Pi_n)|=k\Big)=\sum_{\eta\in\Omega_{n,k}} P\Big(\mathcal{K}^{(n)}(\Pi_n)=\eta\Big):=$$

$$c_{n,k} \quad (5)$$

כעת נשאר להציב ב-(4) את (2)ו-(5). הערות: א. ל-θ קוראים פרמטר חופשי של מבנה אקראי. הוא משחק תפקיד חשוב בחקר בעיות אסימפטוטיות אשר הוזכרו קודם לכן.
ב. מ-(3) נובע שעבור כל k נתון, ההסתברות המותנית על $\Omega_{n,k}$ הנגזרת ממידה מולטיפלי-קטיבית μ_n היא כמו כן מידה מולטיפליקטיבית.

שלושה סוגים עיקריים של מבנים אקראים

בהתאם לשלוש ההתפלגויות של מ.א. $Z_j,\ j\geq 1$ שהוזכרו קודם לכן, מבדילים בשלושת הסוגים הבאים של מבנים פריקים אקראים:
אספים(=$Assemblies$)רב קבוצות (= $Multisets$)ו
מבחרים(=$Selections$).
את כל שלושת הסוגים של המבנים ניתן לתאר באופן סימלי עי" אותה מערכת הבאה:

מבנה פריק בגודל n

אי-פריק (m_n)	$\ldots$	אי-פריק (m_2)	אי-פריק (m_1)

כל מבנה π_n מורכב מ- k_1 מבנים אי-פריקים בגודל $1,\ldots$,מ-k_n מבנים אי-פריקים בגודל n, כך ש- $(k_1,\ldots,k_n)\in\Omega_n$. בהמשך נראה כי במקרה של אסיפות החלקיקים הם ממוספרים, במקרה של $Multisets$ הם זהים ובמקרה של $Selections$ בכל תא נכנס לא יותר מחלקיק אחד.
אנו נקבל את התפלגויות הספקטרומים ופונקציות יוצרות של סדרות $\{p_n\}$ עבור שלושת הסוגים של מבנים אקראיים.
ראשית נגדיר מכפלת קושי עבור טורי חזקות. יהיו

$$f_1(x)=\sum_{i\geq 0} t_i x^i, \quad f_2(x)=\sum_{j\geq 0} r_j x^j,$$

שני טורי חזקות "פורמליים", כלומר ללא ציון רדיוס ההתכנסות שלהם .
אזי מכפלת קושי $f=f_1 * f_2$ שלהם מוגדרת כדלקמן:

$$[x^n]f(x)=\sum_{i=0}^{n} t_i r_{n-i},\ n\geq 0.$$

טענה 2: פונקציה יוצרת של $\{c_n\}$

תהי $S^{(j)}(x)=\sum_{k\geq 0} a_k^{(j)} x^{kj}$ פונקצית יוצרת הסתברויות של מ.א. Z_j. אזי מכפלת קושי $g=\prod_{j\geq 1} S^{(j)}$ היא פונקצית יוצרת של הסידרה $\{c_n\}$.

הוכחה:

$$[x^n]g(x)=[x^n]\prod_{j=1}^{\infty} S^{(j)}(x)=[x^n]\prod_{j=1}^{n} S^{(j)}(x)=$$

$$\sum_{\eta\in\Omega_n}\prod_{j=1}^{n} a_{k_j}^{(j)}=c_n.$$

אנו נצטרך לשנות קנה מידה של כמה גודלים שהוצגו קודם. בהנחה ש -

$$a_0^{(j)}=P(Z_j=0)>0,\ j\geq 1,$$

נגדיר

$$\tilde{a}_k^{(j)}:=\frac{a_k^{(j)}}{a_0^{(j)}},\quad j\geq 1$$

ובהתאם לזאת נגדיר

$$\tilde{c}_n=\big(\prod_{j=1}^{n} a_0^{(j)}\big)^{-1}c_n,\quad n\geq 1,\quad \tilde{c}_0=1.$$

לכן הפונקציות היוצרות של סדרות $\{\tilde{a}_k^{(j)}\}$ ו-$\{\tilde{c}_n\}$ הן בהתאמה $\tilde{S}^{(j)}$ ו- $\tilde{g}$:

$$\tilde{S}^{(j)}(x)=\frac{S^{(j)}(x)}{a_0^{(j)}},\quad j\geq 1,$$

$$\tilde{g}(x)=\prod_{j\geq 1}\tilde{S}^{(j)}(x).$$

עתה קל לראות שאת נוסחת הספקטרום ניתן לרשום בעזרת גודלים מסולמים($scaled$=) $\tilde{\bullet}$ כדלקמן:

$$P\Big(\mathcal{K}^{(n)}=(k_1,\ldots,k_n)\Big)=\frac{\prod_{j=1}^{n}\tilde{a}_{k_j}^{(j)}}{\tilde{c}_n},$$

$$\eta=(k_1,\ldots,k_n)\in\Omega_n,\quad n\geq 1.\ (6)$$

מרישום הנ"ל נובע של-$\tilde{c}_n$ ניתן לקרא פונקצית חלוקה מסולמת. בהמשך נראה שבכל שלושת המקרים הנ"ל של מבנים אקראיים, $\tilde{g}$ היא פונקציה יוצרת של $\{p_n\}$.

אסיפות.

במקרה הזה Z_j מפולג פואסוני עם פרמטר a_j : $Z_j\sim Po(a_j),\ j\geq 1$. לכן

$$a_k^{(j)}=e^{-a_j}\frac{a_j^k}{k!},\quad j\geq 1,\quad k\geq 0.$$

לכן,

$$\tilde{a}_k^{(j)} = \frac{a_j^k}{k!}, \quad j \geq 1, \quad k \geq 0$$

ו-

$$P\Big(\mathcal{K}^{(n)} = \eta\Big) = (\tilde{c}_n)^{-1} \prod_{j=1}^{n} \frac{a_j^{k_j}}{k_j!}, \quad \eta \in \Omega_n, \ (8)$$

כאשר

$$\tilde{c}_n = \sum_{\eta \in \Omega_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{a_j^{k_j}}{k_j!}. \quad (9)$$

עתה נראה כי ההתפלגות (8) מתאימה למערכת עם חלקיקים ממוספרים. תהי $\eta = (k_1, \ldots, k_n) \in \Omega_n$
חלוקה נתונה של n חלקיקים ממוספרים בין מבנים אי-פריקים,
כך שלכל אחד מ-k_j המבנים האי-פריקים מגודל j "נכנסים" j חלקיקים. זה אומר שאת החלוקה הנ"ל η נתן לבצע במספר אופנים

$$\frac{n!}{(1!)^{k_1} k_1! (2!)^{k_2} k_2! \ldots (n!)^{k_n} k_n!}$$

המתקבל עי" נוסחה מולטינומית.משום שישנם m_j סוגים של מבנים אי-פריק בגודל j, לכל אחד מהפילוגים הנ"ל מתאימות

$$m_1^{k_1} \ldots m_n^{k_n}$$

גירסאות שונות. בסיכומו של דבר יהיו ס"הכ

$$n! \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{m_j}{j!}\right)^{k_j} \frac{1}{k_j!}$$

מבנים π_n בעלי ספקטרום η הנ"ל.כתוצאה מכך, מספרם הכולל של המבנים מגודל n הוא:

$$p_n = n! \sum_{\eta \in \Omega_n} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{m_j}{j!}\right)^{k_j} \frac{1}{k_j!}.$$

עתה נשאר לסמן

$$a_j = \frac{m_j}{j!}, \quad j \geq 1$$

כדי לקבל ש-

$$p_n = n! \tilde{c}_n \quad (10)$$

ושעבור A_n -קבוצת המבנים π_n בעלי ספקטרום η, $\rho_n = P(A_n)$ שווה לאגף ימני של (8).
נמצא עתה פונקציה יוצרת של $\{\tilde{c}_n\}$ הקשורה ל-$\{p_n\}$ בעזרת (10).

$$S^{(j)}(x) = \sum_{k \geq 0} e^{-a_j} \frac{a_j^k}{k!} x^{jk} = e^{-a_j} \sum_{k \geq 0} \frac{\left(a_j x^j\right)^k}{k!} =$$

$$e^{-a_j}\exp{(a_j x^j)},\quad j\geq 1$$

כאן $a_0^{(j)}=e^{-a_j}$ כך ש-

$$\tilde{S}^{(j)}(x)=\exp{(a_j x^j)},\ j\geq 1,$$

ו-

$$\tilde{g}(x)=\exp{(\sum_{j\geq 1} a_j x^j)}.\quad (11)$$

<u>דוגמאות של אסיפות.</u>

א. <u>תמורות.</u> ראינו ש-$m_j=(j-1)!$, כך ש- $a_j=\frac{1}{j}$ ו-

$$\tilde{g}(x)=\exp{(\sum_{j\geq 1}\frac{1}{j}x^j)}=$$

$$\exp\left(\log\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n\geq 0}x^n.$$

לכן $\tilde{c}_n=1,\ n\geq 0$, בהתאם לנוסחת קושי.

נחשב את $P(K_j^{(n)}=k_j)$ -ההסתברויות השוליות של הספקטרום.

נתחיל מ-$P(K_1^{(n)}=0)$-ההסתברות שתמורה אקראית לא מכילה אף נקודת שבת. נגדיר את המאורע

$$E_i^{(n)}=\{\pi_n\in S_n:\pi_n(i)=i\}.$$

אזי

$$P(K_1^{(n)}=0)=1-P\Big(\bigcup_{i=1}^n E_i^{(n)}\Big).\quad (12)$$

לפי עקרון הכלה-הדחה

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^n E_i^{(n)}\Big)=\sum_{i=1}^n P\Big(E_i^{(n)}\Big)-$$

$$\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n}P\Big(E_{i_1}^{(n)}\bigcap E_{i_2}^{(n)}\Big)+\ldots$$

$$(-1)^{l+1}\sum_{1\leq i_1<\ldots i_l\leq n}P\Big(E_{i_1}^{(n)}\ldots\bigcap E_{i_l}^{(n)}\Big)+\ldots$$

$$(-1)^{n+1}P\Big(E_1^{(n)}\bigcap\ldots\bigcap E_n^{(n)}\Big).$$

מזה נובע

$$P(K_1^{(n)}=0)=1-\Big(n\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{n(n-1)}{2}\frac{(n-2)!}{n!}+\ldots$$

$$(-1)^{l+1}\binom{n}{l}\frac{(n-l)!}{n!}+\dots(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\Big) =$$

$$\sum_{l=2}^{n}\frac{(-1)^l}{l!}=\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^l}{l!}\to e^{-1}, \quad n\to\infty.$$

באופן דומה,

$$P(K_j^{(n)}=k)=\frac{j^{-k}}{k!}\sum_{l=0}^{[\frac{n}{j}]-k}(-1)^l\ \frac{j^{-l}}{l!}\to$$

$$\exp(-\frac{1}{j})\ \frac{(\frac{1}{j})^k}{k!}=Po(\frac{1}{j}), \quad n\to\infty. \quad (13)$$

נדגיש שההתפלגות הגבולית זהה להתפלגות של מ.א. $Z_j,\ j\geq 1$.
בעתיד נראה ש-(13) היא מקרה פרטי של תכונה כללית של התנהגות אסימפטוטית של מידות מולטיפליקטיביות (=ספקטרומים).

ב. נוסחת המדגם של $Ewens(1972)$
$(Ewens\ sampling\ formula = ESF)$.
הגדרה פורמלית של המודל:

$$a_j=\frac{\theta}{j}, \quad \theta>0, \quad j\geq 1.$$

אזי

$$\tilde{c}_n=\Big[\exp(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\theta}{j}\ x^j)\Big]_n=[\exp(-\theta\log(1-x)]_n=$$

$$[(1-x)^{-\theta}]_n=(-1)^n\frac{(-\theta)(-\theta-1)\dots(-\theta-n+1)}{n!}=$$

$$\frac{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)}{n!}:=\frac{\theta^{(n)}}{n!}$$

ואנו מגיעים להתפלגות $Ewens$:

$$\mu_n(\eta)=$$

$$\Big(\frac{n!}{\theta^{(n)}}\Big)\prod_{j=1}^{n}\Big(\frac{\theta}{j}\Big)^{k_j}\Big(\frac{1}{k_j!}\Big)=\Big(\frac{n!}{\theta^{(n)}}\Big)\theta^{|\eta|}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\Big(j^{k_j}\Big)k_j!},$$

$$\eta=(k_1,\dots,k_n)\in\Omega_n. \quad (14)$$

במקור התפלגות $Ewens$ הופיעה כמודל הבא של גנטיקת אוכלוסין: לכל בן אדם ישנו מספר רב n של גנים המפוזרים בין תאי גוף. לכל גן יתכן כמה צורות(=מוטציות), כך ש-n מתחלק לקבוצות הגנים בעלי אותו מספר של מוטציות: $n=\sum_{j=1}^{n} jk_j$ כאשר k_j זה מספרם הגנים בעלי j מוסציות כל אחד.במודל הנ"ל הפרמטר θ מבטא קצב המוטציה. הסענה הבאה מגלה דרך להדמית התפלגות $Ewens$.

<u>סענה</u> תהי $\Pi_n^{(\theta)} \in S_n$ תמורה אקראית כך ש-

$$P(\Pi_n^{(\theta)}=\pi_n)=\frac{\theta^{|\pi_n|}}{\theta^{(n)}}, \quad \theta>0, \quad \pi_n \in S_n, \ (15)$$

כאשר $|\pi_n|$- מספר מעגלים ב-π_n. אזי הספקטרום של $\Pi_n^{(\theta)}$ מפולג לפי נוסחת $Ewens$.

הוכחה: נסמן $\mathcal{K}^{(n,\theta)}$ ספקטרום של $\Pi_n^{(\theta)}$ וב-$A_n(\eta)$ קבוצת כל התמורות $\pi_n \in S_n$ בעלות אותו הטפקטרום $\eta \in \Omega_n$. נציין שלפי (15), כל $\pi_n \in A_n(\eta)$ הן בעלות אותו ערך $|\eta|$. לכן מתקיים

$$P\Big(\mathcal{K}^{(n,\theta)}=\eta\Big)=\sum_{\pi_n \in A(\eta)} P(\Pi_n^{(\theta)}=\pi_n)=N(\eta)\frac{\theta^{|\pi_n|}}{\theta^{(n)}},$$

כאשר $N(\eta)=|A_n(\eta)|$. לכן,לפי משפט קושי, מ.ש.ל.

<u>מסקנה</u> ספקטרומים של שני מבנים אקראיים: תמורה אקראית $\Pi_n^{(\theta)}$ ואסיפה אקראית עם $m_j=\theta(j-1)!$ מפולגים באופן זהה.

<u>מסעדה סינית כמודל של התפלגות $Ewens$</u>

במסעדה סינית אינסוף שולחנות עגולים. האורח הראשון מתישב על-יד אחד מהשולחנות, האורח השני תופס שולחן חדש עם ההסתברות $\frac{\theta}{\theta+1}$ או מתיישב מימינו של הראשון בהסתברות $\frac{1}{\theta+1}$, ... האורח מספר $k \geq 2$ תופס שולחן חדש בהסתברות $\frac{\theta}{\theta+k-1}$ ובהסתברות $\frac{1}{\theta+k-1}$ מתיישב מימינו של כל אחד מ-$k-1$ האורחים הקודמים. אחרי בואו של אורח מספר n נוצרת הצגה מעגלית של תמורה אקראית של n כאשר האורחים היושבים על-יד אותו שולחן נחשבים שייכים לאותו מעגל ושולחנות(=מעגלים)מסודרים לפי מספר האורח אשר תופס אותו ראשון. אזי

$$P(\pi_n)=\frac{\theta^{|\pi_n|-1}}{(\theta+1)\ldots(\theta+n-1)}=\frac{\theta^{|\pi_n|}}{\theta^{(n)}}.$$

זה אומר שנוצרת התמורה האקראית $\Pi_n^{(\theta)}$.

תרגיל: מהי ההסתברות ש-6 אורחים יתיישבו באפון הבא:

$$\pi_6=(1,6)(2,4,5)(3).$$

פתרון: ההסתברות המבוקשת שווה ל-

$$P(\pi_6)=\Big(\frac{1}{\theta+5}\Big)\Big(\frac{\theta}{\theta+1}\Big)\Big(\frac{1}{\theta+3}\Big)\Big(\frac{1}{\theta+4}\Big)\Big(\frac{\theta}{\theta+2}\Big)=$$

$$\frac{\theta^3}{\theta^{(6)}}$$

הערות:

א. במודל המסעדה הסינית התיישבות האורח מספר k על-יד שולחן חדש מבטאת את המו-טציה של הגן בדור ה-k.

ב.ESF התקבלה על בסיס של שתי ההנחות הבאות הנקראות חוקי התורשה הגנטית:
(i) ההיסתברות המוטציה בדור ה-k לא תלויה בהתפלגות הגנים ב-$(k-1)$ הדורות הקודמים;
(ii) ההסתברות שסוג הגן בדור ה-k שייך לסוג j שהופיע k_j פעמים בדורות אשר קדמו ל-k, תלויה ב-j ו-k_j בלבד.

תרגיל נסביר קיום חוקי התורשה הנ"ל ע"י הדוגמה. יהי $n=9$ ותהי תמונת המצב ב-n-דורות הקודמים(= פיזור ה-n האורחים בין השולחנות במסעדה סינית) כדלקמן:

1	$2,3,8$
4	$5,7,9$
6	

לישיבה כזאת מתאים ספקטרום $\eta=(3,0,2,0,\ldots,0)\in\Omega_9$
אשר מגדיר חלוקת הגנים ב-9 הדורות שנצפו, כלומר גנים בעלי מוטציה אחת(=גנים מסוג 1) נצפו 3 פעמים וגנים בעלי
שלוש מוטציות (=גנים מסוג 3) נצפו פעמיים. מהי ההסתברות שגן בדור 10 יהי מסוג 3?
תשובה:ההסתברות המבוקשת שווה להסתברות שהאורח מספר 10 יתיישב על- יד אחד משני שולחנות עם 3 אורחים כל אחד. לכן היא שווה ל-

$$\frac{3k_3}{\theta+n}=\frac{6}{\theta+9},$$

בהתאם לחוק (ii).

נביא כמו כן פרוש ה-ESF מתחום של התנהגות החיות.

תחרות על שטח מחיה.

מינים(=קבוצות)שונות $E_1,E_2\ldots,$ של חיות מתחרים על שטח מסויים, כך שבזמנים $1,2,\ldots,$ השטח נכבש כל פעם ע"י חיה אחת השייכת לאחד מה-מינים הנ"ל. חלוקת המינים בין n החיות אשר כבשו את השטח נקבעת ע"י הוקטור $\eta=(k_1,\ldots,k_n)\in\Omega_n$ כאשר k_j הוא מספר המינים בין $E_1,E_2\ldots,$ אשר כבשו את השטח j פעמים כלומר יש להם j (מתוך n)נציגים בשטח.

טענה אם ההסתברות שבזמן n השטח נכבש ע"י חיה ממין חדש, שווה ל-

$$\frac{\theta}{\theta+n-1},\ \theta>0$$

, אזי התנאים (i) ו-(ii) של חוק ירושה שקולים.

הוכחה: נניח שעד וכולל זמן n בשטח נצפו n_1 חיות ממין E_1, ..., n_k חיות ממין E_k, כך ש- $n_1+\ldots+n_k=n$. נסמן ב-$p(n_i,n)$ את ההסתברות שבזמן $n+1$ השטח יכבש ע"י חיה ממין $E_i,\ 1\leq i\leq k$. נובע מכך ש-

$$\sum_{i=1}^{k}p(n_i,n)+\frac{\theta}{\theta+n}=1.\ (16)$$

עבור $k=n$ ו-$n_1=\ldots=n_n=1$ נקבל מ-(16),

$$p(1,n)=\frac{1}{\theta+n}.$$

משום שב-(16) לפחות אחד מ-$n_i>1$, נניח למשל ש- $n_1>1$ וניקח ב-(16), n_1-1 במקום n_1, $n_{k+1}=1$ ויתר ה-n_i ללא שינוי:

$$p(n_1-1,n)+p(n_2,n)+\ldots+p(n_k,n)+$$

$$p(1,n)+\frac{\theta}{\theta+n}=1. \ (17)$$

נפחית (17) מ-(16):

$$p(n_1,n)-p(n_1-1,n)=p(1,n)=p(n_1,n)=\frac{1}{\theta+n}.$$

לכן

$$p(n_1,n)=\frac{n_1}{\theta+n},$$

עבור כל $n, n_1 \leq n$.

הוכחה של הטענה ההפוכה מיידית. מ.ש.ל.

מסקנה:

ו.א. $\mathcal{K}^{(n,\theta)}$ המגדיר את החלוקה אקראית בין המינים, מפולג לפי ההתפלגות ESF.

מספר הקבוצות ב- $\mathcal{K}^{(n,\theta)}$

עבור ספקטרום $\mathcal{K}^{(n,\theta)}$ של מבנה אקראי פריק Π_n כלשהו נגדיר את המ.א. $|\mathcal{K}^{(n)}|=\sum_{j=1}^{n} K_j^{(n)}$ שהוא מספר כולל המבנים אי-פריקים (=קבוצות) ב-Π_n. במקרה התמורות זה מספר מעגלים ובמקרה של ESF זה מספר סוגי הגנים השונים או מספר המינים השונים שנצפו בשטח מריבה עד וכולל זמן n.

למה: מספר התמורות מ-n בעלות k מעגלים

יהי

$$S_{n,k} := \{\pi_n \in S_n : |\pi_n| = k, \quad c_{n,k} := |S_{n,k}|, \quad k \leq n.$$

מתקיים:

$$(i.) \ c(n,k)=(n-1)c(n-1,k)+c(n-1,k-1),$$

$$1 \leq k \leq n, \quad c(0,0)=1, \quad c(n,k)=0, \quad n,k \leq 0,$$

$$(ii.) \ \sum_{k=0}^{n} c(n,k)x^k = x(x+1)\ldots(x+n-1)=x^{(n)}.$$

הוכחה(i). יהי $1 \leq k \leq n$. לכל אחת מהתמורות $\pi_{n-1} \in S_{n-1,k}$ מתאימות $(n-1)$ תמורות $\pi'_n \in S_{n,k}$ המתקבלות מה-π_{n-1}
ע"י הוספת המספר n לימינו של אחד מהמספרים
$1,2,\ldots,n-1$. נעיר ש-$\pi'_n(n) \neq n$.
כתוצאה מכך מתקבלות $(n-1)c_{n-1,k}$
תמורות מסוג הנ"ל השייכות ל-$S_{n,k}$. מאידך לכל תמורה
$\pi_{n-1} \in S_{n-1,k-1}$ מתאימה תמורה אחת

$$\pi'_n \in S_{n,k} : \pi'_n(n)=n,$$

המתקבלת באופן הבא:

$$\pi'_n(i) = \begin{cases} \pi_n(i), & \text{אם } i \neq n \\ n, & \text{אם } i = n. \end{cases}$$

בגלל שבסיכומו של דבר ספרנו את כל התמורות ב-$S_{n,k}$, הוכחנו (i).

(ii).יהי $x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} b(n,k)x^k$. נודא שהמקדמים $b(n,k)$ מקיימים את התנאי (i). מתקיים

$$x^{(n)} = (x+n-1)x^{(n-1)} = \sum_{k=1}^{n} b(n-1,k-1)x^k +$$

$$(n-1)\sum_{k=0}^{n-1} b(n-1,k)x^k$$

$$\Rightarrow (ii)$$

מ.ש.ל.

<u>הערה:</u> למספרים $s(n,k) := (-1)^{n-k}c(n,k),\ k \leq n$ קוראים מספרי $Stirling$ מסוג ראשון. מתקיים:

$$\sum_{k=0}^{n} s_{n,k}x^k = x(x-1)\dots(x-n+1) := x_{(n)}.$$

<u>טענה:</u> מתקיים:

$$(i.)\ P\Big(|\mathcal{K}^{(n,\theta)}| = k\Big) = \frac{\theta^k}{\theta^{(n)}}\ c_{n,k}$$

ו-

$$(ii.)E\Big(|\mathcal{K}^{(n,\theta)}|\Big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\theta}{\theta+k-1}.$$

<u>הוכחה:</u>

$$(i)P\Big(|\mathcal{K}^{(n,\theta)}| = k\Big) = \sum_{\pi_n:|\pi_n|=k} P(\Pi_n^{(\theta)} = \pi_n) =$$

$$\frac{\theta^k}{\theta^{(n)}}\ c(n,k).$$

(ii) נסמן $Z := |\mathcal{K}^{(n,\theta)}|$ ותהי

$$g_Z(x) = \sum_{k=0}^{n} P(Z=k)x^k = Ex^Z$$

פונקציה יוצרת הסתברויות של מ.א. Z. על סמך (i), מתקיים

$$Ex^Z = \sum_{k=0}^{n} x^k \frac{\theta^k}{\theta^{(n)}}\ c(n,k) = \frac{1}{\theta^{(n)}}\sum_{k=0}^{n}(x\theta)^k c(n,k) =$$

$$\frac{(x\theta)^{(n)}}{\theta^{(n)}}=\prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{\theta}{\theta+k-1}+\frac{x\theta}{\theta+k-1}\Big)=$$

$$\prod_{k=1}^{n}\Big(xp_k+q_k\Big),\ (18)$$

כאשר $p_k=\frac{\theta}{\theta+k-1}$ ו- $q_k=1-p_k$. משום שפונקציה xp_k+q_k מזדהה עם פונקציה יוצרת הסתברויות של מ.א. $Be(p_k)$, נובע מ-(18) שמ.א.Z מפולג כסכום של n מ.א. $Be(p_k),\ k=1,\dots,n$ בלתי תלויים. לכן $EZ=\sum_{k=0}^{n}\frac{\theta}{\theta+k-1}$. מ.ש.ל.

חלק (i) של הטענה מאפשר לקבל את האסימפטוטיקה מספר הקבוצות ב-ESF.ידוע $(Moser, Wyman, 1958)$ שעבור $k=o(\log n)$ מתקיים:

$$c(n,k)\sim(n-1)!\ \frac{(\gamma+\log n)^{k-1}}{(k-1)!},\quad n\to\infty,$$

כאשר γ קבוע ידועה.לכן,

$$P\Big(|\mathcal{K}^{(n,\theta)}|=k\Big)\sim\frac{\theta^k}{\theta^{(n)}}(n-1)!\ \frac{(\gamma+\log n)^{k-1}}{(k-1)!},$$

$$k=o(\log n),\quad n\to\infty.$$

זו דוגמה של משפט גבול לוקלי.

ג. <u>תהליכי מזוג ופירוק הפיכים (CFP)</u>

<u>מבוא:מידות אינוריאנטיות ומידות הפיכות</u>

לפי הגדרת (CFP), בכל רגע של זמן $t\geq 0$, תהליך מזוג ופירוק $(CFP=)$ מתואר ע"י חלוקה $\eta\in\Omega_n$, כלומר CFP מקבל ערכים ב-Ω_n לאורך כל הזמן t.כדי לקבוע השתנות הערכים של CFP בזמן, צריך להגדיר קצביהם של שני מעברים:

$$\eta\to\eta^{(i,j)},\quad \eta\to\eta_{(i,j)}$$

עבור כל $\eta\in\Omega_n$ וכל $i,j\,:\,2\leq i+j\leq n$. קצבי המעברים(=מהירויות המעברים) האלו מוגדרים כדלקמן. נסמן ב-X_t מצבו התהליך בזמן t. אזי קצב המעבר הראשון, נאמר $\Psi(i,j;\eta)$, מוגדר כך:

$$\Psi(i,j;\eta):=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P\Big(X_{t+\Delta t}=\eta^{(i,j)}|X_t=\eta\Big)}{\Delta t}.$$

באופן דומה מגדירים את קצב המעבר השני,נאמר $\Phi(i,j;\eta)$:

$$\Phi(i,j;\eta):=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P\Big(X_{t+\Delta t}=\eta_{(i,j)}|X_t=\eta\Big)}{\Delta t}.$$

שתי ההגדרות הנ"ל תקפות עבור כל $t\geq 0$ וכל $i,j:2\leq i+j\leq n$.

הפונקציות Ψ ו-Φ מגדירות את המיקרודינמיקה של התהליך.
מתורה כללית של תהליכים סטוכסטיים ידוע ששתי הפונקציות הנ"ל מאפשרות, באופן עקרוני, לגלות גם מקרודינמיקה של התהליך שהיא התפלגות $\mu_t(\eta)$ של התהליך על מרחב Ω_n בכל זמן $t \geq 0$, כלומר

$$\mu_t(\eta) := P(X_t = \eta), \quad \eta \in \Omega_n, \quad t \geq 0.$$

כמו כן ידוע שבזמן $t = \infty$ התהליך מגיע למצב מאוזן
(= התפלגות מאוזנת = מידה אינוריאנטית), μ על Ω_n :

$$\mu(\eta) := \lim_{t \to \infty} \mu_t(\eta).$$

נסמן ב-$c(\eta, \tilde{\eta}), \ \eta \neq \tilde{\eta} \in \Omega_n$ קצב המעבר $\eta \to \tilde{\eta}$. ברור ש-$c(\eta, \tilde{\eta}) = 0$ כאשר

$$\tilde{\eta} \in \overline{\Big(\bigcup_{i,j} \eta^{(i,j)}\Big)\Big(\bigcup_{i,j} \eta_{(i,j)}\Big)}, \quad \tilde{\eta} \neq \eta.$$

כמו כן ברור ש-

$$P\Big(X_{t+\Delta t} = \eta | X_t = \eta\Big) \to 1, \quad \Delta t \to 0.$$

משום כך נגדיר $c(\eta, \eta)$-קצב היציאה מ-η, באופן הבא:

$$c(\eta, \eta) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - P\Big(X_{t+\Delta t} = \eta | X_t = \eta\Big)}{\Delta t}.$$

נציין שקצבי המעבר וקצב היציאה קשורים זה לה כך ש-

$$c(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}) = \sum_{\eta \neq \tilde{\eta}} c(\eta, \tilde{\eta}), \quad \tilde{\eta} \in \Omega_n. \quad (19)$$

זה נובע מעובדה ש-

$$\sum_{\tilde{\eta} \neq \eta} P\Big(X_{t+\Delta t} = \tilde{\eta} | X_t = \eta\Big) =$$
$$1 - P\Big(X_{t+\Delta t} = \tilde{\eta} | X_t = \tilde{\eta}\Big).$$

ההתפלגות האינוריאנטית μ מתאפינת בכך שהיא מקיימת:

$$\sum_{\eta \neq \tilde{\eta}} c(\eta, \tilde{\eta})\mu(\eta) = c(\tilde{\eta}, \tilde{\eta})\mu(\tilde{\eta}), \quad \tilde{\eta} \in \Omega_n. \quad (20)$$

ה -(20) נקראת משוואת איזון. פרוש משוואת איזון: האגף השמאלי של (20) שווה ל"זרם" הסתברותי הכולל הנכנס ל-$\tilde{\eta}$ מכל $\eta \in \Omega_n : \eta \neq \tilde{\eta}$. תנאי האיזון אומר שבמצב תמידי(=מאוזן) הזרם הזה צריך להיות שווה ל"זרם" הסתברותי" שיוצא מ- $\tilde{\eta}$ (=האגף הימני של (20)).
נניח עתה שמידה μ וקצבי $c(\eta, \tilde{\eta})$ מקיימים את התנאי

$$\mu(\eta)c(\eta, \tilde{\eta}) = \mu(\tilde{\eta})c(\tilde{\eta}, \eta), \quad \eta, \tilde{\eta} \in \Omega_n \quad (21)$$

הנקרא תנאי האיזון המפורט.פרוש ה-(21) שעבור כל זוג
של $\eta, \tilde{\eta} \in \Omega_n$, שני "זרמים" $\tilde{\eta} \to \eta$ ו-$\eta \to \tilde{\eta}$ הם שווים.המידה אשר מקיימת (21) נקראת הפיכה. נראה שכל מידה הפיכה היא אינוריאנטית, כלומר ש-(21) גורר (20). אמנם, על סמך $(19), (21)$:

$$\sum_{\eta \neq \tilde{\eta}} c(\eta, \tilde{\eta})\mu(\eta) =$$

$$\sum_{\eta \neq \tilde{\eta}} c(\tilde{\eta}, \eta)\mu(\tilde{\eta}) = \mu(\tilde{\eta}) \sum_{\eta \neq \tilde{\eta}} c(\tilde{\eta}, \eta) = \mu(\tilde{\eta}) c(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}).$$

מ.ש.ל.

טבעי להניח שקצבי המעבר של CFP הם מהצורה הבאה:

$$\Psi(i, j; \eta) := \Psi(i, j; k_i, k_j) = k_i k_j \psi(i, j),$$

$$i \neq j, \quad 2 \leq i + j \leq n,$$

$$\Psi(i, i; \eta) := \Psi(i, i; k_i, k_i) = k_i(k_i - 1)\psi(i, i),$$

$$2 \leq 2i \leq n,$$

$$\Phi(i, j; \eta) := \Phi(i, j; k_{i+j}) = k_{i+j}\phi(i, j), \quad 2 \leq i + j \leq n.$$

כאן $\psi(i, j), \ \phi(i, j)$ מפורשים בהתאמה כקצבי
מזוג של שתי קבוצות בודדות וקצבי פירוק של קבוצה בודדת לשתי קבוצות, כלומר כקצבי מעבר "סגוליים". טענה: תהי μ מידה המתאימה לספקטרום של אסיפה כלשהי אשר נוצרה ע"י $Z_j \sim \ Po(a_j), \ j \geq 1$.
אזי μ הפיכה ביחס לקצבי מעבר סגוליים המקיימים:

$$q(i, j) := \frac{\psi(i, j)}{\phi(i, j)} = \frac{a_{i+j}}{a_i a_j}, \quad 2 \leq i + j \leq n.$$

הוכחה:נוודא קיום תנאי האיזון המפורט. לפי (8) מתקיים:

$$\mu(\eta) = (\tilde{c}_n)^{-1} \prod_{j=1}^{n} \frac{a_j^{k_j}}{k_j!}, \quad \eta \in \Omega_n.$$

נובע מכך שעבור $i \neq j : i, j \geq 1$ מתקיים:

$$\mu(\eta^{(i,j)}) = \mu(\eta) \Big(\frac{k_j k_i}{a_j a_i}\Big) \Big(\frac{a_{i+j}}{k_{i+j} + 1}\Big).$$

זאת ניתן לרשום כ

$$(k_{i+j} + 1) a_i a_j \mu(\eta^{(i,j)}) = k_j k_i a_{i+j} \mu(\eta).$$

זהו תנאי האיזון המפורט ביחס לקיצבי מעבר

$$c(\eta^{(i,j)},\eta)=\Phi(i,j;\eta^{(i,j)})=(k_{i+j}+1)a_ia_jl(i,j)$$

ו-

$$c(\eta,\eta^{(i,j)})=\Psi(i,j;\eta)=k_jk_ia_{i+j}l(i,j)$$

כאשר $l(i,j)>0$ פונקציה כלשהי.
באופן דומה מוכיחים את הטענה בשני המיקרים הנותרים. הערה: בהקשר ל-CFP, הפרמ-טרים a_j יכולים לקבל ערכים אי-שליליים כלשהם, כלומר לאו דווקא ערכים מצורה

$$a_j=\frac{m_j}{j!},\quad j\geq 1$$

.

ד.חלוקות של קבוצה סופית

נסמן ב-$[n]=\{a_1,\dots,a_n\}$ קבוצה סופית של n איברים $a_1,\dots,a_n$, כאשר $[0]=\emptyset$. בלי הגבלת ההכללה אפשר להניח ש-$[n]=\{1,\dots,n\}$.
חלוקה $\pi_n=(C_1,\dots,C_l),\ 1\leq l\leq n$ של $[n]$ היא קבוצה של תת קבוצות $C_i\subseteq[n],\ i=1,\dots,l$ כך ש-

- $C_i\neq\emptyset,\ j=1,\dots,l$
- $C_j\bigcap C_i=\emptyset,\ j\neq j$
- $C_1\bigcup C_2\bigcup\dots\bigcup C_l=[n]$.

ל-C_i קוראים בלוקים ומסמנים ב-$|\pi_n|=l$ מספר בלוקים ב-π_n.
כאן בלוקים הם מבנים אי-פריקים ו-$|C_i|$ זה גודל הבלוק C_i, כך שלכל מבנה פריק $\pi_n=(C_1,\dots,C_l)$
מתאימה החלוקה $\eta=(k_1,\dots,k_n)\in\Omega_n$, (=ספקטרום) כאשר k_j הוא מספר הבלוקים ב-π_n שגודלם j.נציין שאין חשיבות
לסדר רשימת הבלוקים. הוסכם למספר אותם לפי מספר מינימלי (מתוך $1,2\dots,n$) שהבלוקים מכילים.
לפי ניסוח הבעיה, כל בלוק מתאפיין רק באיברים המרכיבים אותו.
לכן $m_j=1,\ j\geq 1$. כמו כן, מניסוח הבעיה ברור שהחלקיקים (=איברים) הם ממוספרים. ובכן, $Z_j\sim Po(\frac{1}{j!}),\ j\geq 1$ ובהתאם לכך,

$$\tilde{g}(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{p_n}{n!}x^n=\exp\Big(\sum_{j\geq 1}\frac{1}{j!}x^j\Big)=$$

$$\exp\Big(e^x-1\Big).\quad(22)$$

למספר כולל של חלוקות הקבוצה $[n]$ קוראים מספר $Bell$ ומסמנים אותו $B(n)$. לכן $p_n=B(n)$ ועל סמך (22):

$$\sum_{n\geq 0}\frac{B(n)}{n!}x^n=\exp\Big(\sum_{j\geq 1}\frac{1}{j!}x^j\Big)=\exp\Big(e^x-1\Big).$$

נסמן $B(n,k)$ מספר מבנים π_n המורכבים מ-k בלוקים.אזי

$$B(n) = \sum_{k=1}^{n} B(n,k).$$

$B(n,k)$ נקראים מספרי $Stirling$ מסוג שני.
<u>טענה:</u> מתקיים:

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k).$$

הוכחה: נתבונן בחלוקות הקבוצה $[n+1]$. בכל חלוקה הנ"ל המספר $n+1$ נמצא בבלוק שגודלו $k+1$, כאשר $0 \le k \le n$. את יתר k המספרים של אותו בלוק ניתן לבחור ב-$\binom{n}{k}$ אופנים. כתוצאה מכך ישאר לבצע חלוקה של קבוצת $n-k$ מספרים הנותרים. המספר החלוקות האלה שווה ל-$B(n-k)$. לכן,

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(n-k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k).$$

מ.ש.ל.
<u>רב קבוצות</u>
המבנים האקראים האלו נוצרים ע"י קשר מותנה עם מ.א.
Z_j בלתי תלוים ומפולגים בינומית שלילית עם פרמטרים
$m_j, \rho^j,\ j \ge 1$:

$$Z_j \sim NBi(m_j; \rho^j),\ j \ge 1.$$

נזכיר שהתפלגות בינומית שלילית מוגדרת ע"י:

$$a_j^{(k)} = P(Z_j = k) = \binom{m_j + k - 1}{k} \rho^{jk} (1-\rho^j)^{m_j},$$

$$j \ge 1, \quad k \ge 0.$$

אם נגדיר מ.א. X_j כמספר ניסויי ברנולי עד וכולל m_j הצלחות, אזי $Z_j = X_j - m_j,\ j \ge 1$. לכן Z_j ניתן לפרש כמספר ניסויי ברנולי בלתי תלוים מעבר ל-m_j, עד וכולל m_j הצלחות, כאשר הסתברות ההצלחה בכל ניסוי שווה ל-ρ^j. לאור זאת, מניחים ש-$m_j \ge 1,\ j \ge 1$ ו-$0 < \rho < 1$. כאן

$$\tilde{a}_k^{(j)} = \binom{m_j + k - 1}{k} \rho^{jk}, \quad j \ge 1, \quad k \ge 0$$

ובהתאם ל-(6) מתקבל ביטוי הבא עבור הספקטרום:

$$P\Big(\mathcal{K}^{(n)} = \eta\Big) = (\tilde{c}_n)^{-1} \prod_{j=1}^{n} \binom{m_j + k_j - 1}{k_j} \rho^{jk_j} =$$

$$(\tilde{c}_n)^{-1}\rho^n \prod_{j=1}^{n} \binom{m_j+k_j-1}{k_j}, \quad \eta \in \Omega_n,$$

כאשר

$$\tilde{c}_n = \rho^n \sum_{\eta\in\Omega_n} \prod_{j=1}^{n} \binom{m_j+k_j-1}{k_j}.$$

לבסוף, אחרי הצמצום ב-ρ^n מקבלים:

$$P\Big(\mathcal{K}^{(n)}=\eta\Big) = \frac{\prod_{j=1}^{n}\binom{m_j+k_j-1}{k_j}}{\sum_{\eta\in\Omega_n}\prod_{j=1}^{n}\binom{m_j+k_j-1}{k_j}}. \quad (23)$$

משום שהתפלגות הספקטרום איננה תלויה ב-ρ,
האחרון הוא <u>פרמטר חופשי</u> של המודל. עתה נבנה פונקציה יוצרת $\tilde{g}$ עבור סידרה $\{\tilde{c}_n\}$. מתקי-
ים:

$$\tilde{S}_j(x) = \sum_{k\ge 0}\binom{m_j+k-1}{k}\rho^{jk}x^{jk} =$$

$$\frac{1}{\Big(1-(\rho x)^j\Big)^{m_j}}, \quad j \ge 1.$$

מכך נובע ש-

$$\tilde{g}(x) = \prod_{j\ge 1}\frac{1}{\Big(1-(\rho x)^j\Big)^{m_j}}. \quad (24)$$

(המעבר האחרון נעשה בעזרת נוסחת בינום של $Newton$) הפונקציה שהתקבלה היא הכללה של פונקציה יוצרת של $Euleur$.
מטרתנו הבאה היא לגלות מבנה אקראי אשר יוצר את הספקטרום (23).
<u>למה</u> יהי k מספר חלקיקים <u>זהים</u> ו-m מספר תאים, כך שכל תא יכול לאכלס מספר לא מוגבל של החלקיקים הנ"ל.אזי מספר פילוגי החלקיקים בין התאים שווה ל-

$$\binom{m+k-1}{k}.$$

הוכחה:רעיון ההוכחה פותח בפיזיקה סטטיסטית.
נקבע שתי מחיצות בקצוות ו-$m+k-1$ מקומות בין המחיצות שמתוכם נבחר $m-1$ מקומות למחיצות (בין התאים).

$$\Big|\ \underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet}_{m+k-1}\ \Big|$$

לכל בחירה הנ"ל של מחיצות מתאים פילוג של k חלקיקים בין m תאים. לדוגמא, אחד מהפילוגים עבור $k=4$ ו-$m=3$:

$$\Big|\ \bullet\ \Big|\ \bullet\ \bullet\ \Big|\ \bullet\ \Big|$$

ולהפך, לכל פילוג של החלקיקים מתאימה בחירה של $m-1$ מחיצות בין $m+k-1$ מקומות.לכן מספר הפילוגים האפשריים הוא

$$\binom{m+k-1}{m-1} = \binom{m+k-1}{k}$$

מ.ש.ל.

עתה נתבונן במבנה פריק π_n המאכלס n חלקיקים זהים,כלומר לא ממוספרים. תהי $\eta = (k_1, \ldots, k_n)$ חלוקת החלקיקים בין מיבנים אי-פריקים, כך ש-k_j זה מספר החלקיקים במבנה אי-פריק בגודל j. ראינו ש-n חלקיקים זהים ניתן לפלג בין m_j תאים (=מבנים אי-פריקים בגודל j) ב-

$$\binom{m_j+k_j-1}{k_j}$$

אופנים שונים. לכן ישנם סה"ל

$$N(\eta) = \prod_{j=1}^{n} \binom{m_j+k_j-1}{k_j}$$

מבנים פריקים בעלי אותו ספקטרום(= חלוקה η).זה אומר שמספר p_n של כל המבנים הפרי-קים בגודל n המאכלסים בחלקיקים זהים, שווה ל-

$$p_n = \sum_{\eta \in \Omega_n} \prod_{j=1}^{n} \binom{m_j+k_j-1}{k_j} = \rho^{-n}\tilde{c}_n.$$

נסמן כרגיל ב-Π_n מבנה אקראי המפולג באופן אחיד על p_n המבנים הנ"ל וב-$\mathcal{K}^{(n)}$ הספקטרום שנוצר. מתקיים:

$$P(\mathcal{K}^{(n)} = \eta) = \frac{N(\eta)}{p_n}.$$

הנוסחה שהתקבלה זהה ל-(23).

<u>דוגמאות</u>

א.<u>חלוקות משוקללות.</u> הנוסחה (24) מראה שחלוקות משוקללות של מספר n הם רב קבוצות, וזה כמובן בהתאם לעובדה שבניסוח המודל החלקיקים אשר מאכלסים מבנים אי-פריקים הם זהים.

נתבונן במיוחד במקרה $-m_j = 1,\ j \geq 1$ חלוקות לא משוקללות של n.מ-(23) מקבלים:

$$\mu(\eta) = P\Big(\mathcal{K}^{(n)} = \eta\Big) = \frac{1}{\sum_{\eta \in \Omega_n} 1} = \frac{1}{p_n}, \quad \eta \in \Omega_n.$$

זה מראה ש-μ היא התפלגות אחידה על Ω_n, או במילים אחרות, כל חלוקות של n הן שווי הסתברות.

נסמן עתה ב-$p_{n,k}$ מספר חלוקות של n המכילות k מחוברים בלבד. מאחר ו-$p_{n,k}$ תלוי בשני פרמטרים, פונקציה יוצרת הסידרה $\{p_{n,k}\}$ היא פונקציה $g(x,z)$ של שני משתנים:

$$g(x,z) := \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq 0} p_{n,k} z^k x^n.$$

<u>טענה</u>
מתקיים:

$$g(x,z) = \prod_{j\geq 1} \frac{1}{1-zx^j}. \quad (25)$$

הוכחה: נמצא פיתוח לטור חזקות של האגף הימני של (25):

$$\prod_{j\geq 1}\frac{1}{1-zx^j} = \prod_{j\geq 1}\Big(\sum_{l\geq 0}(zx^j)^l\Big).$$

לכן,

$$[x^n z^k]\prod_{j\geq 1}\frac{1}{1-zx^j} = [x^n z^k]\prod_{j\geq 1}\Big(\sum_{l\geq 0} z^l x^{jl}\Big) =$$

$$[x^n z^k]\Big(1+\ldots+z^{k_1+\ldots+k_n}x^{1k_1+2k_2\ldots+\ldots nk_n}+\ldots\Big) = p_{n,k}.$$

מ.ש.ל.

ב. <u>גז אידאלי: מודל מוכלל של $Bose-Einstein$</u>

הנחת היסוד של מכניקה קוונטית קובעת שאנרגיה של כל חלקיק, למשל מולקולה של גז, יכולה לקבל ערכים (=להמצא ברמות) בודדים $1,2,\ldots,$ בלבד. הרמות הנ"ל הן ערכים עצמי-ים של אופרטור מסויים, כך שכל ע"ע j הוא בעל כפילות m_j(=לרמה j של אנרגיה ישנם m_j סוגים). לפי כך האנרגיה הכוללת $E=n$ של מערכת מתחלקת בין החלקיקים, למשל מול-קולות גז, כך שלכל אחד מ-k_j חלקיקים ישנה אנרגיה ברמה j. מאחר שהחלקיקים נחשבים כזהים, המודל הוא רב קבוצה. המקרה $m_j=1,\ j\geq 1$ נקרא מודל $Bose-Einstein$ והמקרה $m_j=j^\alpha,\ \alpha>0,\ j>0$ נקרא מודל מוכלל של $Bose-Einstein$.

לבסוף נעיר שאם חלקיקים נחשבים ממוספרים אזי המודל הגז הוא אסיפה, בפרט במקרה $m_j=j^\alpha,\ j\geq 1$, האסיפה מכונה מודל של $Bolzman$.

ג. <u>יערות עצים לא ממוספרים וללא שורשים</u>

עץ הנו גרף קשיר ללא מעגלים שאחד מקודקודיו שלו יכול להבחר כשורש. יער על n קודקודים הוא איחוד של כמה עצים (=מבנים אי-פריקים) הנבנים על סה"כ n הקודקודים. הקודקודים יכולים להיות ממוספרים או לא.

המקרה שבנידון הוא רב קבוצה. אפשר להוכיח שכאן
$m_j \sim c\rho^{-j}j^{-\frac{5}{2}},\ j\to\infty$, כאשר $\rho=0.3383$, $c=0.5349$.

<u>מבחרים</u>

מבחרים מוגדרים כרבי קבוצות המורכבות ממבנים אי-פריקים השונים זו מזו, כלומר למבנה "נבחר" לא יותר מ"נציג" אחד מכל אחד מ-m_j סוגים של מבנים אי-פריקים בגודל j. על סמך זה מספרם של המבחרים בעלי ספקטרום נתון $\eta=(k_1,\ldots,k_n)\in\Omega_n$ שווה ל-

$$N(\eta) := \prod_{j=1}^{n}\binom{m_j}{k_j}$$

ואנו מקבלים את נוסחת ההתפלגות של ספקטרום המבחרים האקראים:

$$P\Big(\mathcal{K}^{(n)}=\eta\Big)=\frac{\prod_{j=1}^{n}\binom{m_j}{k_j}}{p_n}, \quad (26)$$

כאשר

$$p_n=\sum_{\eta\in\Omega_n}N(\eta).$$

לבסוף נותר לוודא שההתפלגות הנ"ל נוצרת עי" קשר מותנה עם מ.א. Z_j המפולגים בינומית עם הפרמטרים m_j ו-$\frac{\rho^j}{1+\rho^j}$,
כאשר $m_j\ge 1, \quad \rho>0$:

$$P(Z_j=k)=\binom{m_j}{k}\Big(\frac{\rho^j}{1+\rho^j}\Big)^k\Big(\frac{1}{1+\rho^j}\Big)^{m_j-k},$$

$$0\le k\le m_j.$$

אמנם,

$$\tilde{a}_k^j=\binom{m_j}{k}\rho^{jk},$$

$$0\le k\le m_j.$$

כתוצאה מכך מתקבלת נוסחה (26).
נציין שההתפלגות (26) של הספקטרום לא תלויה ב-ρ, כך ש-ρ הוא פרמטר חופשי של המודל.
בהמשך נקבל:

$$\tilde{S}^{(j)}(x)=\sum_{k\ge 0}\tilde{a}_k^j x^{jk}=$$

$$\sum_{k=0}^{m_j}\binom{m_j}{k}(\rho x)^{jk}=\Big(1+(\rho x)^{jk}\Big)^{m_j}, \quad j\ge 1.$$

ו-

$$\tilde{g}(x)=\prod_{j\ge 1}\Big(1+(\rho x)^{jk}\Big)^{m_j}.$$

<u>דוגמא</u>
חלוקות מספר n המורכבות ממחוברים שכולם שונים. נזכיר שעבור חלוקות של n, $m_j=1,\ j\ge 1$.
לפיכך, במקרה שבנידון מבחר הוא אוסף

$$\Omega_n^{(d)}:=\{\eta=(k_1,\dots,k_n)\in\Omega_n: k_i\in\{0,1\}\}.$$

למשל, עבור $n=6$ החלוקות האפשריות הן: $(1,0,0,0,1,0)$, $(1,1,1,0,0,0)$, $(0,0,0,0,0,1)$, $(0,1,0,1,0,0)$.
ההצבה $m_j=1,\ j\ge 1$ ב-(26) מראה שהספקטרום מפולג אחיד על $\Omega_n^{(d)}$.
נציין שהמודל שבנידון משמש כאחד ממודלים של גז אידיאלי המכונה מודל $Fermi$.

סיכום:הקשר בין אוספים,רבי קבוצות ומבחרים

ראינו ששלושת המבנים האקראים הנ"ל קשורים לשלוש הפונקציות היוצרות הבאות של הסדרות : $\{\tilde{c}_n\}$

- אוספים:

$$\tilde{g}(x) = \exp\Big(\sum_{j\geq 1} a_j x^j\Big), \quad a_j = \frac{m_j}{j!}, \quad j \geq 1$$

- פונקציה יוצרת מעריכית. כאן: $p_n = n!\tilde{c}_n,\ n \geq 1$.

- רבי קבוצות:

$$\tilde{g}(x) = \prod_{j\geq 1}(1-(\rho x)^j)^{-m_j}.$$

כאן $p_n = \rho^{-n}\tilde{c}_n,\ n \geq 1$. נגדיר עתה פונקציה יוצרת h של הסידרה $\{p_n\},\ n \geq 1$:

$$h(x) = \sum_{n\geq 0} p_n x^n.$$

אזי מתקיים:

$$h(x) = \sum_{n\geq 0} \tilde{c}_n(\rho^{-1}x)^n = \tilde{g}(\rho^{-1}x) = \prod_{j\geq 1}(1-x^j)^{-m_j}.$$

זאת פונקציה יוצרת של $Euleur$.

- מבחרים:

$$\tilde{g}(x) = \prod_{j\geq 1}(1+(\rho x)^j)^{m_j}.$$

כאן שוב $p_n = \rho^{-n}\tilde{c}_n,\ n \geq 1$, כך ש-

$$h(x) = \sum_{n\geq 0} p_n x^n = \sum_{n\geq 0} \tilde{c}_n(\rho^{-1}x)^n =$$

$$\tilde{g}(\rho^{-1}x) = \prod_{j\geq 1}(1+x^j)^{m_j}.$$

נראה עתה שגם את הפונקציות היוצרות $\tilde{g}$ עבור רב קבוצות ומבחרים ניתן לרשום כפונקציות מעריכיות. נסמן

$$M(x) = \sum_{j\geq 1} m_j x^j.$$

אזי במקרה רבי קבוצות,

$$\tilde{g}(x) = \exp\Big(-\sum_{j\geq 1} m_j \log(1-x^j)\Big) =$$

$$\exp\Big(\sum_{j\geq 1} m_j \sum_{k\geq 1}\frac{x^{jk}}{k}\Big)=$$

$$\exp\sum_{k\geq 1}\Big(\frac{M(x^k)}{k}\Big).$$

באותו אופן, עבור מבחרים

$$\tilde{g}(x)=\exp\sum_{k\geq 1}\Big(\frac{M(-x^k)}{k}\Big).$$

בהמשך נקבל:

$$[x^l]\Big(\sum_{k\geq 1}\frac{M(x^k)}{k}\Big)=[x^l]\Big(\sum_{j\geq 1} m_j \sum_{k\geq 1}\frac{x^{jk}}{k}\Big)=$$

$$\sum_{jk=l}\frac{m_j}{k}=: a_l\geq 0,\quad l\geq 1.\quad (27)$$

לפיכך פונקציה יוצרת עבור רבי קבוצות ניתן לרשום בצורה הבאה:

$$\tilde{g}(x)=\exp\Big(\sum_{l\geq 1} a_l x^l\Big).$$

פרוש הדבר שרב קבוצה עם פרמטרים $\{m_j,\ j\geq 1\}$
נתונים שקולה לאסיפה עם הפרמטרים $\{a_l,\ l\geq 1\}$ המתקבלים מ-$\{m_j,\ j\geq 1\}$ ע"י (27).
אלא שהשקילות הנ"ל היא פורמלית בלבד, כי הנוסחה (27)
מעבירה כל סידרה $\{m_j\}$ המשתנה באופן רגולרי(=מסודר) ביחס ל-j, לסידרה $\{a_j\}$ המתנהגת בצורת תוהו ובוהו(=לא מסודרת).

למשל, תהי $m_j=1,\ j\geq 1$. אזי $a_l=\sum_{jk=l}\frac{1}{k},\ l\geq 1$. מכאן מקבלים:

$$a_1=1, a_2=1+1/2=3/2, a_3=1+1/3=4/3,$$

$$a_4=1+1/2+1/4=7/4, a_5=6/5,\ldots$$

באופן כללי, a_l שווה לסכום של כל המספרים $1/k$ כש-k הוא מחלק של l. לגבי הבחירות המצב שונה באופן מהותי. אמנם,

$$[x^l]\Big(\sum_{k\geq 1}\frac{M(-x^k)}{k}\Big)=[x^l]\Big(\sum_{j\geq 1} m_j \sum_{k\geq 1}\frac{(-x)^{jk}}{k}\Big),$$

כך שבין המקדמים $a_l,\ l\geq 1$ יהיו שליליים.לפיכך בחירות אינן שקולות לרבי קבוצות כלל.

<u>יסודות שיטת</u> $Khitchine$

ב-1950 $Khitchine$ הציע שיטה הסתברותית לפתרון
בעיות אסימפטוטיות המתעוררות בפיזיקה סטטיסטית.
השיטה מתבססת על שני העקרונות הבאים:

- בניית מודל עזר הסתברותי עם פרמטר חופשי, כדי לבטא את הגודל שבנידון דרך פונ-קצית ההסתברות של סכום משתנים אקראים בדידים ובלתי תלוים.ההתפלגות של מ.א. הנ"ל תלויה בפרמטר חופשי.

- הוכחת משפט גבול לוקלי בעזרת בחירה מתאימה של פרמטר חופשי.

נדגים ישום השיטה עבור חקר האסימפטוטיקה של פונקצית חלוקה מסולמת $\tilde{c}_n$. נתחיל ממידה מולטיפליקטיבית μ_n כלשהי הנוצרת ע"י מ.א. Z_j, כך ש-

$$P(Z_j = k) = a_k^{(j)},\ k \geq 0,\ j \geq 1.$$

בנוסף לפונקציה יוצרת $\tilde{g}$ נגדיר פונקציה יוצרת $\tilde{g}_n$ הקטומה ב-n:

$$\tilde{g}_n(x) = \prod_{j=1}^{n} \tilde{S}^{(j)}(x) := \sum_{k \geq 0} \tilde{c}_{k,n} x^k,\ n \geq 1.$$

נציין שעבור כל $x \in \mathcal{C} : |x| \leq 1$,

$$|\tilde{S}^{(j)}(x)| = |\sum_{k \geq 0} \tilde{a}_k^{(j)} x^{jk}| \leq \frac{1}{a_0^{(j)}},\ j \geq 1.$$

לכן הטור $\tilde{g}_n$ גם כן מתכנס בתחום הנ"ל. קל להבחין ש-$(n+1)$ המקדמים הראשונים של $\tilde{g}$ ו-$\tilde{g}_n$ שווים זה לזה: $\tilde{c}_{k,n} = \tilde{c}_n, 0 \leq k \leq n$.
נעבור עתה למשתנה x מרוכב:

$$x = e^{-\sigma + 2\pi i \alpha},$$

כאשר $\sigma \geq 0$ ו- $\alpha \in R$. לפיכך $|x| \leq 1$ ומתקיים:

$$\int_0^1 \tilde{g}_n(x) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha =$$

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_{k,n} e^{-k\sigma + 2\pi i \alpha (k-n)} \right) d\alpha = \tilde{c}_n e^{-n\sigma}. (28)$$

במעבר האחרון השתמשנו באורטונורמליות מערכת פונקציות $e^{2\pi i \alpha m},\ m \geq 0$:

$$\int_0^1 e^{2\pi i \alpha m} d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{אם},\ m = 0 \\ 0, & \text{אם},\ m \neq 0,\quad m > 0 \end{cases} (29)$$

עתה מ-(28) אנו מגיעים לזהות המבוקשת ביחס לפרמטר חופשי $\sigma \geq 0$:

$$\tilde{c}_n = e^{n\sigma} \int_0^1 \tilde{g}_n \left(e^{-\sigma + 2\pi i \alpha} \right) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha =$$

$$e^{n\sigma}\int_0^1 \prod_{j=1}^{n}\left(\tilde{S}^{(j)}\left(e^{-\sigma+2\pi i\alpha}\right)\right)e^{-2\pi i\alpha n}d\alpha. \quad (30)$$

כדי להעניק פרוש הסתברותי ל-(30) אנו נרשום את הזהות כ-

$$\tilde{c}_n = e^{n\sigma}\tilde{g}_n\left(e^{-\sigma}\right)\int_0^1 \phi^{(n)}(\alpha)e^{-2\pi i\alpha n}d\alpha. \ (31)$$

כאשר פונקציה $\phi^{(n)}$ מוגדרת ע"י:

$$\phi^{(n)}(\alpha) = \prod_{j=1}^{n}\frac{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma+2\pi i\alpha})}{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})}.$$

נסמן

$$p_{jk} = \frac{\tilde{a}_k^{(j)}e^{-\sigma jk}}{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})},$$

כדי להסיק ש-

$$\phi_j(\alpha) := \frac{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma+2\pi i\alpha})}{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})}, \quad j \geq 1$$

היא פונקציה אופיינית של מ.א. X_j המוגדר ע"י:

$$P(X_j = jk) = p_{jk}, \ j \geq 1, \ k \geq 0.$$

על סמך זה, $\phi^{(n)} = \prod_{j=1}^{n}\phi_j$ היא פונקציה אופיינית של סכום

$$V_n = X_1 + \ldots + X_n \ (31a)$$

של n מ.א. X_j בלתי תלוים. כעת נזכיר שעבור מ.א. Y בדיד המקבל ערכים שלמים בלבד ובעל פונקציה אופיינית ϕ_Y מתקיים:

$$\int_0^1 \phi_Y(\alpha)e^{-2\pi i\alpha n}d\alpha = P(Y = n).$$

זה נובע מ-(29) והגדרה של פונקציה אופיינית.
בסיכומו של דבר אנו מקבלים מ-(31) את הצגת $Khintchine$
(=בצורת $Khintchine$). של פונקצית חלוקה מסולמת $\tilde{c}_n$:

$$\tilde{c}_n = e^{n\sigma}\tilde{g}_n(e^{-\sigma})P(V_n = n), \quad n \geq 1. \quad (32)$$

כאן $\sigma \geq 0$ הינו פרמטר חופשי של המודל.
הערה: מהדיון הקודם ברור שההצגה (32) תקפה למעשה עבור כל σ כך שהטור $\tilde{g}$ מתכנס.בהמשך נראה שעבור מבנים פריקים מסויימים (32) מתקיימת עבור $\sigma \in R$.
בדרך כלל מטרת חקר התנהגות אסימפטוטית של איזושהו גודל p_n, כש- $n \to \infty$, הינה מציאת פונקציה $f(n)$ כך ש-$p_n \sim f(n), \ n \to \infty$.

משפט הגבול לוקלי
התנהגות אסימפטוטית של ההסתברות

$$P(V_n = n)$$

ב-(32) עבור V_n ב-(31) נקבעת בעזרת תורת משפטי גבול לוקליים.
(i.) עיקרון $Khintchine$ ו-$Fawler - Darwin$ לבחירת פרמטר σ.
ראשית נציין ש-$P(V_n = n)$ תלויה ב-σ.
משום שב-σ תלויות ההתפלגויות של מ.א. $X_j,\ j \geq 1$. רצוי לבחור σ כך שההסתברות שבנידון תיהיה גדולה.אחת מהדרכים אשר יכולות (!) בהרבה מקרים להבסיח זאת, היא לבחור $\sigma = \sigma_n$ כך ש-

$$EV_n = n. \quad (33)$$

ראיון הבחירה הזאת מתבסס על עובדה שמסה הסתברותית של מ.א. מרוכזת בסביבה מסויימת של תוחלת שלו, בהתאם לאי-שיוויון צבישב:

$$P(|X - EX| \geq A) \leq \frac{VarX}{A^2}, \quad A > 0.$$

מ- (33) מתקבלת משוואה הבאה ביחס ל-σ:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k \geq 0} \left(kj \frac{\tilde{a}_k^{(j)} e^{-\sigma kj}}{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})} \right) = n.$$

להלן צורת המשוואה (33) עבור שלושת המבנים הפריקים.
אוספים
ראינו ש-

$$\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma}) = \exp\left(a_j e^{-j\sigma}\right), \quad j \geq 1.$$

לכן,

$$p_{jk} = \frac{\left(a_j e^{-\sigma j}\right)^k}{k!} \exp\left(-a_j e^{-\sigma j}\right), \quad k \geq 0, \quad j \geq 1.$$

מאחר ו-

$$p_{jk} := P(X_j = jk) = P(\frac{1}{j} X_j = k),$$

מ.א.

$$\frac{1}{j} X_j \sim Po(a_j e^{-\sigma j}), \quad j \geq 1.$$

כתוצאה מכך $EX_j = j a_j e^{-\sigma j}, \quad j \geq 1$ ולבסוף נקבל את הצורה הבאה של (33):

$$EV_n := M_1(\sigma) = \sum_{j=1}^{n} j a_j e^{-\sigma j} = n, \quad n \geq 1. \quad (*)$$

רבי קבוצות
כאן

$$\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma}) = \frac{1}{\Big(1-\rho^j e^{-\sigma j}\Big)^{m_j}}, \quad j \geq 1.$$

ו-

$$p_{jk} = \Big(1-(\rho e^{-\sigma})^j\Big)^{m_j} \binom{m_j+k-1}{k} (\rho e^{-\sigma})^{jk},$$

$$k \geq 0, \quad j \geq 1.$$

באגף ימין התפלגות בינומית שלילית עם פרמטרים m_j ו-$(\rho e^{-\sigma})^j$. לפיכך, כמו במקרה הקודם,

$$\frac{1}{j} EX_j = \frac{m_j (\rho e^{-\sigma})^j}{1-(\rho e^{-\sigma})^j}, \quad j \geq 1$$

ו-

$$EV_n := M_2(\sigma) = \sum_{j=1}^{n} \frac{j m_j (\rho e^{-\sigma})^j}{1-(\rho e^{-\sigma})^j} = n, \quad n \geq 1. \quad (**)$$

תזכורת: יהי $Z = X - m$, כאשר מ.א. X הוא מספר ניסויי ברנולי בלתי תלויים עם הסתברות הצלחה p בכל ניסוי, עד וכולל m הצלחות. את המ.א. X ניתן להציג כסכום של m מ.א. גאומטריים בלתי תלויים, כל אחד עם פרמטר p. לכן $EZ = \frac{m}{q} - m$.
מבחרים

$$\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma}) = \sum_{k=0}^{m_j} \binom{m_j}{k} (\rho e^{-\sigma})^{jk} = (1+(\rho e^{-\sigma})^j)^{m_j},$$

$$j \geq 1.$$

$$p_{jk} = \Big(1+(\rho e^{-\sigma})^j\Big)^{-m_j} \binom{m_j}{k} (\rho e^{-\sigma})^{jk} =$$

$$\binom{m_j}{k} \Big(\frac{(\rho e^{-\sigma})^j}{1+(\rho e^{-\sigma})^j)}\Big)^k \Big(\frac{1}{1+(\rho e^{-\sigma})^j}\Big)^{m_j-k},$$

$$k \geq 0, \quad j \geq 1.$$

לכן

$$\frac{1}{j} X_j \sim Bi\Big(m_j; \frac{(\rho e^{-\sigma})^j}{1+(\rho e^{-\sigma})^j}\Big), \quad j \geq 1$$

נובע מכך ש-

$$EX_j = j m_j \frac{(\rho e^{-\sigma})^j}{1+(\rho e^{-\sigma})^j}, \quad j \geq 1$$

ו-

$$EV_n := M_3(\sigma) = \sum_{j=1}^{n} j m_j \frac{(\rho e^{-\sigma})^j}{1+(\rho e^{-\sigma})^j} = n. \quad (***)$$

מסתבר שמשוואות $(*), (**), (***)$ בעלות התכונה החשובה מאוד הבאה.
נסכים לסמן $b_j = a_j$ במקרה אוספים ו-$b_j = m_j$ בשני המקרים הנותרים.

<u>הערה</u>

מנוסחאות $(23), (26)$ של התפלגויות הספקטרום רבי קבוצות ומבחרים בהתאמה ראינו שההתפלגויות הנ"ל לא תלויות בפרמטר ρ. לפיכך באנליזה האסימפטו-טית שנציג בהמשך נקבע $\rho = 1$.

<u>למה</u> לכל אחת משלושת המשוואות $(*), (**), (***)$ קיים פתרון σ_n אחד ויחיד משלה, עבור כל $n \geq 1$ נתון.יתר על כן, הפתרון הוא מהצורה

$$\sigma_n = \delta_n + \log y, \quad \delta_n \to 0, \quad n \to \infty, \quad y > 0, \quad (34)$$

אמ"ם הפרמטרים b_j מקיימים את שני התנאים הבאים
עבור כל $\epsilon > 0$:

$$\limsup_{j\to\infty} \left(b_j y^{-j} e^{\epsilon j} \right) \geq 1. \quad (35)$$

ועבור כל n מספיק גדול

$$b_n \leq y^n e^{\epsilon n}. \quad (36)$$

הוכחה:כל שלושת הפונקציות $M_i,\ i = 1, 2, 3$ הן מונוטוניות יורדות ביחס ל-σ,
כך שעבור כל n סופי מתקיים:

$$M_i(+\infty) = 0, \quad M_i(-\infty) = +\infty,\ i = 1, 2, 3.$$

זה מבטיח קיום ויחידות הפתרון $\sigma = \sigma_n$ עבור כל n סופי נתון, בכל שלושת המקרים הנ"ל.
כדי להוכיח את החלק השני של טענת הלמה, נתבונן בנפרד בכל אחת מהמשוואות $(*) - (***)$.
לשם הוכחה שהתנאי (35) מספיק ל-(34) נרשום

$$\sigma_n = \delta_n + \log y, \quad y > 0, \quad n \geq 1.$$

$$(*) :$$

$$n = \sum_{j=1}^{n} j a_j e^{-\sigma_n j} \geq n a_n e^{-\sigma_n n} \geq n y^n e^{-n\epsilon} e^{-\sigma_n n}. \Rightarrow$$

$$1 \geq y^n e^{-n(\epsilon+\delta_n)} \Rightarrow$$

עבור n מספיק גדול:

$$\epsilon + \delta_n \geq 0, \quad \epsilon > 0. \quad (37)$$

מאידך, מ-(36) נובע שעבור n_1, n מספיק גדולים ו-$\epsilon > 0$ כלשהו מתקיים:

$$n = const + \sum_{j=n_1}^{n} j a_j e^{-\sigma_n j} \leq const + \sum_{j=n_1}^{\infty} j e^{(\epsilon - \delta_n) j}. \Rightarrow$$

$$\epsilon - \delta_n \geq 0. \quad (38)$$

מ-(37) ו-(38) נובע ש-$\delta_n \to 0,\ n \to \infty$. ובכן הוכחנו שהתנאים (35),(36) מספיקים ל-(34).
עתה נוכיח את הטענה ההפוכה. נניח שמתקיים (34).אזי

$$n = \sum_{j=1}^{n} j a_j e^{-\sigma_n j} = \sum_{j=1}^{n} j a_j y^{-j} e^{-\delta_n j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} j a_j y^{-j} e^{\epsilon j},$$

עבור n מספיק גדול ו-$\epsilon > 0$ מספיק קטן.אם (35) לא מתקיים, כלומר

$$\limsup_{j \to \infty} \left(a_j y^{-j} j e^{\epsilon_1 j} \right) < 1$$

, עבור $\epsilon_1 > 0$ מסויים, אזי

$$n \leq \sum_{j=1}^{\infty} j e^{-\epsilon_1 j} e^{\epsilon j} < \infty,$$

עבור כל $\epsilon < \epsilon_1$.סתירה. לבסוף, בהנחה שמתקיים (34),

$$n \geq n a_n y^{-n} e^{-\epsilon n},$$

עבור n מספיק גדול ו-$\epsilon > 0$ קטן. מ.ש.ל.

$**$

ראשית נזכיר שב-$**$ $\rho = 1$. אזי מ-(35),

$$n \geq n m_n y^{-n} e^{-n \delta_n} \geq n y^n e^{-\epsilon n} y^{-n} e^{-n \delta_n},$$

עבור n מספיק גדול ו-$\epsilon > 0$ כלשהו.זה מוכיח ש-$\epsilon + \delta_n > 0$. בדרך דומה לזאת עבור אוספים מוכיחים את יתר טענות הלמה.

$* * *$

כאן עבור $\rho = 1$ מתקיים:

$$n \geq n m_n \frac{e^{-n\sigma_n}}{1 + e^{-n\sigma_n}}.$$

לכן אם מתקיים (34), אזי עבור n מספיק גדול,

$$1 \geq m_n \frac{y^{-n} e^{-n\epsilon}}{1 + e^{-\sigma_n n}.}$$

נזכיר שעבור המבחרים הפונקציה $\tilde{g}$ מוגדרת (= המכפלה אינסופית מתכנסת) בתנאי ש-

$$x : |\rho x| < 1 \Leftrightarrow \rho e^{-\sigma} < 1.$$

לכן עבור n מספיק גדול ו-$\epsilon > 0$ מספיק קטן יתקיים:

$$m_n \le A y^n e^{\epsilon n} = y^n e^{n(\epsilon + \frac{\log A}{n})} = y^n e^{n \epsilon_1},$$

כאשר $\epsilon_1 = \epsilon + \frac{\log A}{n} > 0$, מאחר ו-$\epsilon > 0$ שרירותי. זה מראה ש-(36) מתקיים.
בדרך דומה ניתן להוכיח את יתר טענות הלמה.
הערה:תאור המבנים הפריקים אשר מקיימים (34)
תחילה נציין שהתנאי (34) שקול ל-

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \log y, \quad y > 0$$

ושלפי הלמה התנאי האחרון שקול לשני התנאים $(35), (36)$ ביחד.
כעת נביא דוגמה של מחלקת המבנים הפריקים $\mathcal{F}_l$ המקיימים את שני התנאים הנ"ל.להלן נסכים לרשום $a_j \asymp b_j$ אם קיימים כך ש-

$$D_1 \le \frac{a_j}{b_j} \le D_2, \quad j \ge 1.$$

$$\mathcal{F}_l := \{b_j : b_j \asymp y^j j^{l-1} \log^\beta j, \quad j \to \infty, \quad y > 0, \ l, \beta \in \mathcal{R}\}. \tag{39}$$

חשוב לציין שמדרישה $m_j \ge 1, \ j \ge 1$ נובע שב-(39), $y \ge 1$ כש-$b_j = m_j$. להלן נתבונן בבעיות אסימפטוטיות עבור מחלקות $\mathcal{F}_l$ בלבד. מסתבר שמבחינה אנליטית יש להבדיל בשלושת המקרים הבאים בהתאם לערך של l ב-(39):

- $l = 0$ $Logarithmic \ \ case$;
- $l < 0$ $Convergent \ \ case$;
- $l > 0$ $Expansive \ \ case$.

צידוק פיזיקלי לבחירת σ_n. הפרוש של σ_n אשר נביא להלן צויין עוד ע"י $Khintchine$ עבור מודלים פשוטים של מכניקה סטטיסטית. אנו נכליל את הפרוש למבנים פריקים כלשהם.
נחזור להצגת $Khintchine$ (32). נתבונן בפונקציה

$$\Phi(\sigma) := e^{n\sigma} \tilde{g}(e^{-\sigma}).$$

כמו כן נגדיר את הפונקציה

$$U(\sigma) := \log \Phi(\sigma) = n\sigma + \sum_{j=1}^{n} \log \tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma}).$$

נציין ש-

$$\left(\log \tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})\right)'_\sigma = -\frac{\sum_{k\geq 0}\left(\tilde{a}_k^{(j)} e^{-\sigma jk} jk\right)}{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})} = -EX_j.$$

לכן

כעת אנו רואים ש-

$$\left(U(\sigma_n)\right)'_\sigma = 0,$$

$$\Leftrightarrow$$

σ_n- נקודה קריטית של הפונקציה U. יחד עם זה,

$$\left(U(\sigma)\right)''_\sigma = -\sum_{j=1}^{n}\left(EX_j\right)'_\sigma.$$

נזכירש-

$$EX_j = -\frac{\left(\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})\right)'_\sigma}{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})}.$$

לשם קיצור הרישום נסמן:

$$Q = Q(\sigma) = \tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})$$

אזי,

$$\left(EX_j\right)'_\sigma = -\frac{Q''_\sigma Q - \left(Q'_\sigma\right)^2}{Q^2}.$$

כאן

$$Q'_\sigma(\sigma) = -\sum_{k\geq 0}\left(\tilde{a}_k^{(j)} jk e^{-\sigma jk}\right) < 0, \quad \sigma \geq 0.$$

ו-

$$Q''_\sigma(\sigma) = \sum_{k\geq 0}\left(\tilde{a}_k^{(j)} (jk)^2 e^{-\sigma jk}\right) > 0, \quad \sigma \geq 0.$$

מזה בעזרת האי-שיוויון קושי- שוורץ אנו מפיקים ש-

$$\left(EX_j\right)'_\sigma < 0, \quad \sigma \geq 0. \Rightarrow$$

$$\left(U(\sigma)\right)''_\sigma > 0, \quad \sigma \geq 0. \Rightarrow$$

פונקציה U קעורה ב-$\mathcal{R}^+$ ו-σ_n נקודת מינימום שלה ב-$\mathcal{R}^+$.

אם נתייחס למבנה פריק כמערכת טרמודינמית של n חלקיקים הנמצאת במצב מאוזן, אזי בהתאם לחוק השני של טרמודינמיקה, הפונקציה U מתפרשת כאנטרופיה של המערכת ו-σ כהופכי של הטמפרטורה המוחלטת של המערכת.המשמעות הגדולה של אנטרופיה היא בכך

שאנטרופיה מודדת רמת התוהו ובוהו(=אקראיות) שבמערכת. על- כן בחירה הנ"ל $\sigma = \sigma_n$ של הפרמטר חופשי יוצרת מערכת בעלת אנטרופיה מינימלית.

$(ii.)$ סמיאינבריאנטים של V_n.

<u>חומר עזר</u>

יהי Y מ.א. בעל פונקציה אופיינית $\phi_Y(\alpha) = Ee^{2\pi i\alpha Y}$ וכך ש-$E|Y^k| < \infty,\ k \le r$ עבור m נתון.אזי מתקיים פיתוח לטור טיילור:

$$\log \phi_Y(\alpha) = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(2\pi i\alpha)^k}{k!} s_k + O(s_r\alpha^r), \quad \alpha \to 0,$$

כאשר המקדמים s_k הנקראים סמיאינווריאנטים מתבטאים דרך המומנטים $EY^k,\ k \le r$ של המ.א. Y נביא הביטויים השלושת הסמיאינווריאנטים הראשונים:

$$s_1 = EY_1, \quad s_2 = VarY, \quad s_3 = E(Y - EY)^3, \ldots.$$

למה: להלן ביטויים מפורשים עבור סמיאינווריאנטים $s_k,\ k \ge 1$ עבור שלושת הסוגים המבנים הפריקים:

$*$ אוספים.

$$\frac{1}{j} X_j \sim Po(a_j e^{-\sigma j}), \quad j \ge 1. \Rightarrow$$

$$\phi_j(\alpha) = \exp\Big(- a_j e^{-\sigma j}\Big) \sum_{k \ge 0} e^{2\pi i\alpha k j} \frac{(a_j e^{-\sigma j})^k}{k!} =$$

$$\exp\Big(- a_j e^{-\sigma j}\Big) \exp\Big(a_j e^{-\sigma j} e^{2\pi i\alpha j}\Big) =$$

$$\exp\Big(a_j e^{-\sigma j}(e^{2\pi i\alpha j} - 1)\Big) \Rightarrow$$

$$\phi^{(n)}(\alpha) = \exp\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j e^{-\sigma j}(e^{2\pi i\alpha j} - 1)\Big) \Rightarrow$$

$$\log\Big(\phi^{(n)}(\alpha)\Big) = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{-\sigma j}(e^{2\pi i\alpha j} - 1)$$

כעת קל למצא את ה-$s_r,\ r \ge 1$ מפתוח לטור טיילור של $\log \phi^{(n)}$:

$$\Big(\log\Big(\phi^{(n)}(\alpha)\Big)\Big)^{(r)}_{\alpha=0} = (2\pi i)^r s_r, \quad r \ge 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} j^r a_j e^{-\sigma j}(2\pi i)^r \Rightarrow$$

$$s_r = \sum_{j=1}^{n} j^r a_j e^{-\sigma j}, \quad r \ge 1.$$

$$**$$

רבי קבוצות.

$$\frac{1}{j}X_j \sim NeBi(m_j; (\rho e^{-\sigma})^j).$$

נשתמש בעובדה ש-$X_j = X - m_j$ כאשר מ.א.

$$X = Y_1 + \ldots + Y_{m_j}$$

הוא סכום של m_j מ.א. גאומטריים עם הפרמטר $(\rho e^{-\sigma})^j$ (=הסתברות הכשלון) בלתי תלוים. לכן,

$$\phi_{Y_1}(\alpha) = \sum_{k\geq 1} e^{2\pi i\alpha k}(1-(\rho e^{-\sigma})^j)(e^{-\sigma})^{j(k-1)} =$$

$$\Big(\frac{1-(\rho e^{-\sigma})^j}{(\rho e^{-\sigma})^j}\Big)\Big(\frac{e^{2\pi i\alpha}(\rho e^{-\sigma})^j}{1-e^{2\pi i\alpha}(\rho e^{-\sigma})^j}\Big) \Rightarrow$$

$$\phi_X(\alpha) = e^{2\pi i\alpha m_j}\Big(\frac{1-(\rho e^{-\sigma})^j}{1-e^{2\pi i\alpha}(\rho e^{-\sigma})^j}\Big)^{m_j} \Rightarrow$$

$$\phi_{X_j}(\alpha) = \Big(\frac{1-(\rho e^{-\sigma})^j}{1-e^{2\pi i\alpha j}(\rho e^{-\sigma})^j}\Big)^{m_j} \Rightarrow$$

$$\log\Big(\phi^{(n)}(\alpha)\Big) =$$

$$\sum_{j=1}^n m_j\Big(\log(1-(\rho e^{-\sigma})^j) - \log(1-e^{2\pi i\alpha j}(\rho e^{-\sigma})^j)\Big).$$

נשתמש בפיתוח לטור טיילור של $\log(1-x), |x|<1$:

$$-\log(1-e^{2\pi i\alpha j}(\rho e^{-\sigma})^j) = \sum_{k\geq 1}\frac{e^{2\pi i\alpha jk}(\rho e^{-\sigma})^{jk}}{k}$$

$$\Big(-\log(1-e^{2\pi i\alpha j}(\rho e^{-\sigma})^j)\Big)^{(r)}_{\alpha=0} =$$

$$m_j\sum_{k\geq 1}\frac{(2\pi jk)^r(\rho e^{-\sigma})^{jk}}{k} = m_j j^r(2\pi i)^r\sum_{k\geq 1}k^{r-1}(\rho e^{-\sigma})^{jk}$$

$$\Rightarrow s_r = \sum_{j=1}^n m_j j^r\sum_{k\geq 1}k^{r-1}(\rho e^{-\sigma})^{jk}, \quad r\geq 1.$$

* * * מבחרים.
הפעם נשתמש בנוסחה כללית שהתקבלה קודם:

$$\phi^{(n)}(\alpha) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma+2\pi i\alpha})}{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})}, \quad \alpha \in R.$$

במקרה שבנידון,

$$\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma}) = (1+(\rho e^{-\sigma})^j)^{m_j}, \quad j \geq 1 \Rightarrow$$

$$\log \phi_{X_j}(\alpha) =$$

$$m_j\Big(\log(1+(\rho e^{-\sigma+2\pi i\alpha})^j) - \log(1+(\rho e^{-\sigma})^j)\Big)$$

$$\Rightarrow s_r = \sum_{j=1}^{n} m_j j^r \sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}k^{r-1}(\rho e^{-\sigma})^{jk}, \quad r \geq 1.$$

<u>הערה.</u> מתקיים:

$$Q_r(\sigma) := j^{r-1}\sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}k^{r-1}(\rho e^{-\sigma})^{jk} =$$

$$(-1)^{(r-1)}\Big(\sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}(\rho e^{-\sigma})^{jk}\Big)_{\sigma}^{(r-1)} =$$

$$(-1)^{r-1}\big(\frac{(\rho e^{-\sigma})^j}{1+(\rho e^{-\sigma})^j}\big)^{(r-1)}, \quad r \geq 1. \Rightarrow$$

$$Q_r(\sigma) = -(-1)^{r-1}\big(\frac{1}{1+(\rho e^{-\sigma})^j}\big)^{(r-1)} > 0, \quad r \geq 2.$$

(40)

מסקנה: הסמיאנווריאנטים של כל שלושת הסוגים המבנים הפריקים הם חיוביים.
$(iii.)$ אסימפטוטיקה של σ_nו-s_r. מקרה $Expansive$.
בהמשך נראה שהאסימפטוטיקה של מבנה אקראי נקבעת ע"י התנהגות של σ_nו-$r \geq 1$,$s_r = s_r(\sigma_n)$ כש-$n \to \infty$. משום כך נהוג לכנות את האחרונים פרמטרים בסיסיים של מבנה. נציין ש-$s_r = s_r(n,\sigma)$ ונזכיר ש-$\sigma_n = \delta_n + \log y$. למה. במקרה $Expansive = (l > 0)$ עם $\beta = 0$ ו-$y \geq 1$, עבור כל שלושת המבנים הפריקים כש-$n \to \infty$ ו- $\sigma = \sigma_n$, מתקיים:

$$\delta_n \asymp n^{-1/(l+1)}, \quad s_r(n) \asymp n^{(r+l)/(l+1)}, \quad r \geq 2.$$

יתרה מזה, קיים $N \geq 1$ כך שעבור כל $n \geq N$, $\delta_{n+1} < \delta_n$ ו- $r \geq 2$,$s_r(n) \leq s_r(n+1)$.
הוכחה:א. המקרה $Expansive = (l > 0)$ מתאפיין בכך שעבורו $\sigma_n > 0$ ו-$n\delta_n \to \infty$ עבור כל שלושת הסוגים של מבנים פריקים.

חומר עזר:נוסחת סכמה של $Euleur$.
תהי פונקציה $f:\mathcal{R}^+\Rightarrow\mathcal{R}^+$ רציפה ומונוטונית החל מ- x_0 מסויים. אזי עבור $n>x_0$ וקבועים מסויימים $A_i, B_i,\ i=1,2$,

$$A_1+f(n)+\int_1^n f(x)dx\le\sum_{j=1}^n f(j)\le$$

$$A_2+f(x_0)+\int_1^n f(x)dx,$$

אם f יורדת ו-

$$A_1+f(x_0)+\int_1^n f(x)dx\le$$

$$\sum_{j=1}^n f(j)\le A_2+\int_1^n f(x)dx+f(n),$$

אם f עולה. אנו נשתמש במסקנה הבאה של הנוסחה: אם בנוסחת $Euleur$ האינטגרל שואף ל-∞ כש- $n\to\infty$, אזי מתקיים :

$$\sum_{j=1}^n f(j)\sim\int_1^n f(x)dx,\quad n\to\infty.$$

נתחיל מרבי קבוצות. מ- $**$, הגדרת המחלקת $\mathcal{F}_l,\ l>0$ והנחה ש-$\rho=1$,

$$n=\sum_{j=1}^n\frac{jm_je^{-j\sigma_n}}{1-e^{-j\sigma_n}}\ge D_1\sum_{j=1}^n j^le^{-j\delta_n}\ge D_1n^le^{-n\delta_n}.\Rightarrow$$

$\delta_n>0$, כש n מספיק גדול.קודם לכן הוכחנו ש- $\delta_n\to 0,\ n\to\infty$. על סמך זה,

$$n\ge D_1\sum_{j=1}^n j^le^{-j\delta_n}\ge D_1e^{-n\delta_n}\sum_{j=1}^n j^l,\ l>0$$

ואנו משיגים ש-$n\delta_n\to\infty$, כש- $n\to\infty$.כאן השתמשנו בעובדה ש -

$$\sum_{j=1}^n j^l\sim\int_1^n x^ldx=O(n^{l+1}),\quad l\to\infty.$$

ב. בעזרת העובדות שב-"א" ונוסחת $Euleur$,

$$n\le D_2\sum_{j=1}^n\frac{j^le^{-j\delta_n}}{1-y^{-j}e^{-j\delta_n}}\le$$

$$\delta_n^{-l-1}D_2\sum_{j=1}^\infty\frac{(j\delta_n)^le^{-j\delta_n}}{1-e^{-j\delta_n}}\delta_n=\delta_n^{-l-1}D_2\int_0^\infty\frac{x^le^{-x}}{1-e^{-x}}dx.$$

משום שהאינטגרל חסום, אנו מקבלים ש-
$\delta_n \leq D_4 n^{-1/(l+1)}, n \geq 1,$ כש- $D_4 > 0$ קבוע. מאידך,

$$n \geq D_1 \sum_{j=1}^{n} j^l e^{-j\delta_n} \sim \delta_n^{-l-1} D_1 \int_0^\infty x^l e^{-x} dx.$$

זה נותן $\delta_n \geq D_3 n^{-1/(l+1)}, n \geq 1,$ כש- $D_3 > 0$ קבוע. לכן הוכחנו ש- $\delta_n \asymp n^{-1/(l+1)}$.
ג.נמצא את האסימפטוטיקה של הסמיאינווריאנטים.
לפי הנוסחה שהתקבלה עבור s_r,

$$s_r \asymp \sum_{j=1}^{n} j^{r+l-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{r-1} e^{-\delta_n jk} y^{j-jk} =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{r-1} \sum_{j=1}^{n} j^{r+l-1} e^{-\delta_n jk} y^{j-jk}.$$

נטפל בעזרת נוסחת $Euleur$ בסכום פנימי:

$$\sum_{j=1}^{n} j^{r+l-1} e^{-\delta_n jk} y^{j-jk} \sim \int_1^n x^{r+l-1} e^{-\delta_n xk} y^{x(1-k)} dx$$

$$= \delta_n^{-r-l} k^{-l-r} \int_{k\delta_n}^{kn\delta_n} z^{r+l-1} y^{\frac{z}{k\delta_n}(1-k)} e^{-z} dz.$$

(הצבה $z = \delta_n xk$.) בהנחה ש- $y \geq 1$ ועל סמך התנהגות אסימפטוטית של δ_n, האינטגרל קטן או שווה ל- $\Gamma(r+l)$ עבור כל $k \geq 1$, עם שיוויון כש- $k = 1$.לכן

$$\sum_{j=1}^{n} j^{r+l-1} e^{-\delta_n jk} y^{j-jk} \asymp \delta_n^{-r-l} k^{-l-r} \Rightarrow$$

$$s_r \asymp \delta_n^{-r-l} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-l-1},$$

כאשר הטור באגף ימין מתכנס. לכן $s_r \asymp \delta_n^{-r-l}$.
ג.נשאר להוכיח ש- σ_n יורדת מונוטונית ביחס ל-n,החל מ- n מסוים. נניח ש- $\sigma_n \geq \sigma_{n+1}$ עבור n כלשהו. אזי

$$\frac{e^{-j\sigma_{n+1}}}{1 - e^{-j\sigma_{n+1}}} \leq \frac{e^{-j\sigma_n}}{1 - e^{-j\sigma_n}}, \quad j \geq 1,$$

כך שמ-$(**)$ נובע ש-

$$n + 1 = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{j m_j e^{-j\sigma_{n+1}}}{1 - e^{-j\sigma_{n+1}}} \leq$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{j m_j e^{-j\sigma_n}}{1 - e^{-j\sigma_n}} = n + \frac{(n+1) m_{n+1} y^{-n-1} e^{-(n+1)\delta_n}}{1 - y^{-n-1} e^{-(n+1)\delta_n}}.$$

בגלל האסימפטוטיקה של δ_n שהתקבלה קודם לכן, האיבר האחרון שואף ל-0 כש- $n \to \infty$, עבור כל $y \geq 1$. לכן $\sigma_{n+1} < \sigma_n$ עבור n מספיק גדול. זה אומר שאותו דבר מתקיים עבור δ_n. בנוגע לסמיאינוריאנטים, מתקיים,

$$s_r(n+1) \geq \sum_{j=1}^{n} m_j j^r \sum_{k\geq 1} k^{r-1} (\rho e^{-\sigma_{n+1}})^{jk} \geq$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_j j^r \sum_{k\geq 1} k^{r-1} (\rho e^{-\sigma_n})^{jk} = s_r(n), \quad r \geq 1,$$

כאשר האי-שיוויון האחרון נובע משום ש-σ_n יורדת מונוטונית ב-n.
בדרך דומה מוכיחים טענות הלמה עבור יתר המבנים האקראיים.
(iv) ניסוח והוכחת משפט הגבול הלוקלי.
להלן נסמן כפי שמקובל $s_2 = VarV_n := B_n^2$.
משפט הגבול הלוקלי עבור V_n.
במקרה $Expansive$ עם $\beta = 0$, עבור $\sigma = \sigma_n$ מתקיים

$$P(V_n = n) \sim \left(2\pi B_n^2\right)^{-1/2}, \quad n \to \infty.$$

הוכחה: ניתן את ההוכחה עבור רבי קבוצות.
א. נגדיר את הסידרה

$$\alpha_0(n) := \delta_n^{(l+2)/2} \log n \asymp n^{-(l+2)/2(l+1)} \log n.$$

מתקיים:

$$P(V_n = n) = T = T(n) := \int_0^1 \phi^{(n)}(\alpha)\, e^{-2\pi i\alpha n} d\alpha =$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \phi^{(n)}(\alpha)\, e^{-2\pi i\alpha n} d\alpha, \quad n \geq 1.$$

כאן המעבר לקטע $[-1/2, 1/2]$ מסתמך על כך שהפונקציה $\phi^{(n)}$ מחזורית עם מחזור שווה ל-1. אמנם,

$$\phi^{(n)}(\alpha+1) = Ee^{2\pi i(\alpha+1)V_n} = Ee^{2\pi i\alpha V_n},$$

כיון שמ.א. V_n מקבל ערכים שלמים בלבד. בהמשך נפרק את האינטגרל T לסכום של שני אינטגרלים
$T_1 = T_1(n)$ ו-$T_2 = T_2(n)$:

$$T_1 = T_1(n) = \int_{-\alpha_0(n)}^{\alpha_0(n)} \phi^{(n)}(\alpha)\, e^{-2\pi i\alpha n} d\alpha,$$

$$T_2 = T_2(n) = \int_{-1/2}^{-\alpha_0(n)} \phi^{(n)}(\alpha)\, e^{-2\pi i\alpha n} d\alpha +$$

$$\int_{\alpha_0(n)}^{1/2} \phi^{(n)}(\alpha)\, e^{-2\pi i\alpha n} d\alpha.$$

לפי העיקרון שיטת האוכף, מטרתינו הבאה היא להראות שרוב התרומה לאינטגרל T, כש $n \to \infty$, באה מהאינטגרל T_1, כלומר ש-

$$T_2 = o(T_1),\ \ n \to \infty.$$

ב.הבחירה של הקטע האינטגרציה $[-\alpha_0, \alpha_0]$ (= הסביבה הקטנה כש-$\infty \to n$, של "0") מבטיחה קיום שני התנאים החשובים הבאים:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^r s_r = 0,\ \ r \geq 3$$

ו-

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_0^2 B_n^2 = \infty, \qquad\qquad (41)$$

עבור כל $\alpha \in [-\alpha_0(n), \alpha_0(n)]$. נודא ש-$(41)$ אמנם מתקיים בעזרת למה על אסימפטוטיקת הפרמטרים הבסיסיים:

$$|\alpha^r s_r| \leq \alpha_0^r s_r \asymp \Big(n^{-(l+2)/2(l+1)} \log n\Big)^r n^{(r+l)/(l+1)} =$$

$$n^{\frac{l(2-r)}{2(l+1}} \log^r n \to \begin{cases} 0, & \text{אם } r \geq 3 \\ \infty, & \text{אם } r = 2. \end{cases}$$

בהמשך נראה שתנאים (41) הנקראים תנאי $Lyapunov$ מספיקים לקיום המשפט הגבול הלוקלי. מפיתוח של $\log \phi^{(n)}$ לטור טילור, בחירת σ_n ותנאי (41) נובע שעבור כל $\alpha \in [-\alpha_0(n), \alpha_0(n)]$ מתקיים:

$$\log \phi^{(n)}(\alpha) = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(2\pi i\alpha)^k}{k!} s_k + O(s_r \alpha^r) =$$

$$2\pi i\alpha n - 2\pi^2\alpha^2 B_n^2 + \epsilon_n, \quad \epsilon_n \to 0, \quad n \to \infty. \Rightarrow$$

$$\phi^{(n)}(\alpha) e^{-2\pi i\alpha n} = \exp\Big(\log \phi^{(n)}(\alpha) - 2\pi i\alpha n\Big) \sim$$

$$\exp\Big(-2\pi^2\alpha^2 B_n^2\Big), \quad \alpha \in [-\alpha_0(n), \alpha_0(n)]. \Rightarrow$$

$$T_1(n) \sim \int_{-\alpha_0(n)}^{\alpha_0(n)} \exp\left(-2\pi^2\alpha^2 B_n^2\right) d\alpha =$$

$$\Big(2\pi B_n\Big)^{-1} \int_{-2\pi\alpha_0(n)B_n}^{2\pi\alpha_0(n)B_n} \exp(-\frac{u^2}{2}) du \sim$$

$$\left(2\pi B_n\right)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{u^2}{2})du\sim(2\pi B_n^2)^{-1/2}.$$

ג. עתה נמצא חסם עבור האינטגרל $T_2(n)$ כש- $n\to\infty$.
נציין שבתחום האינטגרציה של T_2 הפיתוח הקודם של הפונקציה $\log\phi^{(n)}$ לא תקף מפני שבתחום הנ"ל α לא שואף
ל-0 כש-$n\to\infty$.נתחיל מזהות (עבור $\rho=1$):

$$|\phi^{(n)}(\alpha)|=\prod_{j=1}^{n}\left|\frac{1-e^{-j\sigma_n}}{1-e^{2\pi i\alpha j}e^{-j\sigma_n}}\right|^{m_j}=$$

$$\exp\Big(-\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{2}\log\left|\frac{1-e^{2\pi i\alpha j}e^{-j\sigma_n}}{1-e^{-j\sigma_n}}\right|^2\Big),\quad\alpha\in R.$$

מתקיים:

$$\left|\frac{1-e^{2\pi i\alpha j}e^{-j\sigma_n}}{1-e^{-j\sigma_n}}\right|^2=$$

$$\frac{\left(1-e^{-j\sigma_n}\cos 2\pi\alpha j\right)^2+e^{-2j\sigma_n}\sin^2 2\pi\alpha j}{\left(1-e^{-j\sigma_n}\right)^2}=$$

$$1+\frac{2e^{-j\sigma_n}(1-\cos 2\pi\alpha j)}{\left(1-e^{-j\sigma_n}\right)^2}=1+\frac{4e^{-j\sigma_n}\sin^2(\pi\alpha j)}{\left(1-e^{-j\sigma_n}\right)^2}.$$

כתוצאה מכך נקבל:

$$|\phi^{(n)}(\alpha)|=$$

$$\exp\Big(-\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{2}\log\Big(1+\frac{4e^{-j\sigma_n}\sin^2(\pi\alpha j)}{(1-e^{-j\sigma_n})^2}\Big)\Big),\quad\alpha\in R.$$

נעזר באי-שיוויון:

$$\log(1+x)\geq\frac{x}{1+c},\quad(43)$$

כש- $0\leq x\leq c$ ו- $c>0$ קבוע כלשהו.
עבור כל $j\in[4\sigma_n)^{-1},n]$ נפעיל (43) עם

$$x=x_j(n):=\frac{4e^{-j\sigma_n}\sin^2(\pi\alpha j)}{\Big(1-e^{-j\sigma_n}\Big)^2}\leq\frac{4e^{-1/4}}{(1-e^{-1/4})^2}:=c.$$

אזי

$$|\phi^{(n)}(\alpha)|\leq\exp\left(-\sum_{(4\sigma_n)^{-1}\leq j\leq n}C_1m_je^{-j\sigma_n}\sin^2(\pi\alpha j)\right)\leq$$

$$\exp\left(-\sum_{(4\sigma_n)^{-1}\le j\le n} C_2 j^{l-1} e^{-j\delta_n}\sin^2(\pi\alpha j)\right),\ \alpha\in R,$$

(42)

כאשר השלב האחרון נובע משום ש-$y \geq 1$. מעתה נתבונן ב-(42) כש-$\alpha_0 \le |\alpha| \le 1/2$.
נתן להוכיח שעבור n מספיק גדול,

$$Q_n(\alpha) := \sum_{(4\sigma_n)^{-1}\le j\le n} C_2 j^{l-1} e^{-j\delta_n}\sin^2(\pi\alpha j) \ge \log^2 n,$$

$$\alpha\in[\alpha_0, 1/2]. \quad \Rightarrow .$$

$$T_2(n) \le \exp(-\log^2 n),$$

עבור n מספיק גדול.

ההשואה עם האסימפטוטיקה של האינטגרל $T_1(n)$ מוכיחה ש-$T_2(n) = o(T_1(n))$. מ.ש.ל.
נביא עתה פרוש הסתברותי של המשפט. נסמן

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi VarX}}\exp\Big(-\frac{(x-EX)^2}{2VarX}\Big), \quad x\in R.$$

צפיפות ההתפלגות נורמלית $N(EX, VarX)$. בפרט מתקיים:

$$f(EX) = \frac{1}{\sqrt{2\pi VarX}}$$

עבור מ.א. V_n,

$$EV_n = n, \quad VarV_n = B_n^2.$$

זה אומר שאת משפט הגבול הלוקלי שהוכחנו ניתן לרשום כ-

$$P(V_n = n) \sim f(n), \quad n\to\infty.$$

מסיבה זאת התוצאה שהתקבלה נקראת משפט הגבול לוקלי נורמלי.

חשוב לציין שכל אחד ממ.א. $X_j,\ j=1,2,\dots,n$ תלוים ב-n-כיון שהתפלגותם תלויה בפרמטר $\sigma=\sigma_n$.לאור זה הסידרה הנ"ל של מ.א. נקראת מערך משולש

$$\{X_j = X_j(n), \quad j=1,2,\dots,n; n=1,2,\dots\}:$$

$$\begin{array}{llll} X_1(1) & & & \\ X_1(2) & X_2(2) & & \\ X_1(3) & X_2(3) & X_3(3) & \\ X_1(4) & X_2(4) & X_3(4) & X_4(4) \end{array}$$

(v) נוסחה אסימפטוטית עבור $\tilde{c}_n$.

עתה את הצגת $Khintchine$ (32) עבור מקרה $Expansive$ נתן לרשום באופן הבא:

$$\tilde{c}_n \sim (2\pi B_n^2)^{-1/2} e^{n\sigma_n} \tilde{g}_n(e^{-\sigma_n}), \quad n \to \infty,$$

כאשר

$$\delta_n \asymp n^{-1/(l+1)}, \quad B_n^2 \asymp n^{(2+l)/(l+1)}.$$

נתבונן עתה באספים. עבורם, כש-$y = 1$,

$$\tilde{g}_n(x) = \exp\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j x^j\Big), \quad a_j = \frac{m_j}{j!} \asymp j^{l-1},$$

$$l > 0, \quad j \geq 1 \quad \Rightarrow$$

בעזרת נוסחת סכמה של $Euleur$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j e^{-j\sigma_n} \asymp \sum_{j=1}^{n} j^{l-1} e^{-j\delta_n} \sim \delta_n^{-l}\Gamma(l),$$

$$l > 0.$$

זה מוביל לנוסחה אסימפטוטית גסה עבור $\tilde{c}_n$:

$$\log \tilde{c}_n \asymp -1/2 \log(2\pi) - \log B_n + n\delta_n + \delta_n^{-l}\Gamma(l)$$

$$\sim (1 + \Gamma(l)) n^{l/(l+1)}, \quad l > 0, \quad n \to \infty.$$

זה אומר ש-$\tilde{c}_n$ גודל אקספוננציאלי,"בערך" כ-

$$\exp\Big(n^{l/(l+1)}\Big),$$

כש-$n \to \infty$.

בעית התקבצות($=clustering$).

במבנים פריקים אקראים "המסה" הכוללת n מחולקת בין רכיבים אי-פריקים (=קבוצות) שגודלם שונה.כדי לתאר תמונה טיפוסית של חלוקת ה-n נגדיר עבור כל $\eta \in \Omega_n$ שני גדלים הבאים:

$$\bar{q}_n = \bar{q}_n(\eta) = \max\{1 \leq j \leq n : k_j > 0\} -$$

גודל הרכיב הגדול ביותר בחלוקה נתונה $\eta \in \Omega_n$ ו-

$$q_n = q_n(\eta) = \min\{1 \leq j \leq n : k_j > 0\} -$$

גודל הרכיב הקטן ביותר בחלוקה נתונה $\eta \in \Omega_n$. לדוגמה, עבור

$$\eta = (0, 0, 3, 3, 0, 1, 1, 0, \ldots, 0) \in \Omega_{34},$$

מתקיים
$$q_n = 3, \quad \bar{q}_n = 7.$$
הגודלים הנ"ל מאפיינים את מידת ההתקבצות המסה(=חומר)
בחלוקה η. נעיר ש-$\eta = (n, 0, \ldots, 0)$ מתאימה להתפזרות מקסימלית של החומר, בעוד שב-$\eta = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ החומר מתקבץ לקבוצה אחת בלבד.
בהנתן מבנה אקראי פריק, $\bar{q}_n$ ו-q_n הופכים למ.א..אנו נחקור התפלגותם כש-$n \to \infty$.
מתקיים:
$$P(\bar{q}_n \le r) = \sum_{\eta : \bar{q}_n \le r} P\Big(\mathcal{K}^{(n)} = \eta\Big) =$$
$$(\tilde{c}_n)^{-1} \sum_{\eta : \bar{q}_n \le r} \prod_{j=1}^{n} \tilde{a}_{k_j}^{(j)}, \quad \eta = (k_1, \ldots, k_n) \in \Omega_n.$$

באותו אופן,
$$P(q_n \ge r) =$$
$$(\tilde{c}_n)^{-1} \sum_{\eta : q_n \ge r} \prod_{j=1}^{n} \tilde{a}_{k_j}^{(j)}, \quad \eta = (k_1, \ldots, k_n) \in \Omega_n.$$

להלן, עבור $1 \le \bar{r}, r \le n$ נתונים מראש נשתמש בסימנים:
$$\tilde{c}_n^{(\bar{r})} := \sum_{\eta : \bar{q}_n \le \bar{r}} \prod_{j=1}^{n} \tilde{a}_{k_j}^{(j)} = \sum_{\eta : \bar{q}_n \le \bar{r}} \prod_{j=1}^{\bar{r}} \tilde{a}_{k_j}^{(j)}$$
ו-
$$\tilde{c}_n^{(r)} := \sum_{\eta : q_n \ge r} \prod_{j=r}^{n} \tilde{a}_{k_j}^{(j)}.$$

נציין שגבולות המכפלות אשר בתוך הסכומים מתקבלים מהעובדה ש-$j \ge 1$, $\tilde{a}_0^{(j)} = 1$.
נתחיל מפיתוח הצגת $Khintchine$ עבור ההסתברויות הנ"ל.
לשם כך קודם כל נקבל את ההצגות עבור $\tilde{c}_n^{(\bar{r})}, \tilde{c}_n^{(r)}$. נגדיר פונקציות יוצרות של הסדרות הנ"ל:
$$\tilde{g}_n{}^{(\bar{r})}(x) = \prod_{j=1}^{\bar{r}} \tilde{S}^{(j)}(x) := \sum_{k \ge 0} \tilde{c}_k^{(\bar{r})} x^k, \; n \ge 1$$
ו-
$$\tilde{g}_n{}^{(r)}(x) = \prod_{j=r}^{n} \tilde{S}^{(j)}(x) := \sum_{k \ge 0} \tilde{c}_k^{(r)} x^k, \; n \ge 1.$$
עתה נפעל בדומה לפיתוח של (32). יהי
$$x = e^{-\sigma + 2\pi i \alpha},$$

כאשר $0 \le \sigma$ ו- $\alpha \in R$. לפיכך $|x| \le 1$ ומתקיים:

$$\int_0^1 \tilde{g}_n^{(\bar{r})}(x) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha =$$

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k^{(\bar{r})} e^{-k\sigma + 2\pi i \alpha (k-n)} \right) d\alpha = \tilde{c}_n^{(\bar{r})} e^{-n\sigma}.$$

במעבר האחרון השתמשנו באורטונורמליות מערכת הפונקציות $\{e^{2\pi i \alpha m},\ m \ge 0\}$, ראה (29). עתה אנו מגיעים לזהות המבוקשת ביחס לפרמטר חופשי $\sigma \ge 0$:

$$\tilde{c}_n^{(\bar{r})} = e^{n\sigma} \int_0^1 \tilde{g}_n^{(\bar{r})} \left(e^{-\sigma + 2\pi i \alpha} \right) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha =$$

$$e^{n\sigma} \int_0^1 \prod_{j=1}^{\bar{r}} \left(\tilde{S}^{(j)} \left(e^{-\sigma + 2\pi i \alpha} \right) \right) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha. \Rightarrow$$

$$\tilde{c}_n^{(\bar{r})} = e^{n\sigma} \tilde{g}_n \left(e^{-\sigma} \right) \int_0^1 \phi^{(\bar{r})}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha,$$

כאשר הפונקציה $\phi^{(\bar{r})}$ מוגדרת ע"י:

$$\phi^{(\bar{r})}(\alpha) = \prod_{j=1}^{\bar{r}} \frac{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma + 2\pi i \alpha})}{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})}, \quad \alpha \in R.$$

נסמן

$$p_{jk} = \frac{\tilde{a}_k^{(j)} e^{-\sigma j k}}{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})},$$

כדי להסיק ש-

$$\phi_j(\alpha) := \frac{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma + 2\pi i \alpha})}{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})}, \quad j \ge 1$$

היא פונקציה אופיינית של מ.א. X_j המוגדר ע"י:

$$P(X_j = jk) = p_{jk},\ j \ge 1,\ k \ge 0.$$

על סמך זה, $\phi^{(\bar{r})} = \prod_{j=1}^{\bar{r}} \phi_j$ היא פונקציה אופיינית של סכום

$$V_n^{\bar{r}} = X_1 + \ldots + X_{\bar{r}}$$

של $\bar{r}$ מ.א. X_j בלתי תלוים.
יש לציין שכאן ולהלן האינדקס n בא משום ש- $\sigma = \sigma_n$. בסיכומו של דבר אנו מקבלים את הצגת $Khintchine$ של $\tilde{c}_n^{(\bar{r})}$:

$$\tilde{c}_n^{(\bar{r})} = e^{n\sigma} \tilde{g}_n^{(\bar{r})}(e^{-\sigma}) P(V_n^{(\bar{r})} = n), \quad n \ge 1. \quad (44)$$

באותה דרך מתקבלת גם הצגת $Khintchine$ של $\tilde{c}_n^{(r)}$:

$$\tilde{c}_n^{(r)} = e^{n\sigma}\tilde{g}_n^{(r)}(e^{-\sigma})P(V_n^{(r)} = n), \quad n \geq 1. \quad (45)$$

את האנליזה האסימפטוטית של ההסתברויות שבנידון נבצע עבור אספים במקרה $Expansive$.
עבור אספים את $(44), (45)$ ניתן לרשום כ-

$$\tilde{c}_n^{(\bar{r})} = e^{n\sigma}\exp\big(\sum_{j=1}^{\bar{r}} a_j e^{-j\sigma}\big)P(V_n^{(\bar{r})} = n)$$

ו-

$$\tilde{c}_n^{(r)} = e^{n\sigma}\exp\big(\sum_{j=r}^{n} a_j e^{-j\sigma}\big)P(V_n^{(r)} = n),$$

כאשר

$$\phi^{(\bar{r})}(\alpha) = \exp\Big(\sum_{j=1}^{\bar{r}} a_j e^{-\sigma j}(e^{2\pi i\alpha j} - 1)\Big)$$

ו-

$$\phi^{(r)}(\alpha) = \exp\Big(\sum_{j=r}^{n} a_j e^{-\sigma j}(e^{2\pi i\alpha j} - 1)\Big).$$

ראינו שהסמיאינווריאנטים המ.א.V_n נתונים ע"י:

$$s_k = \sum_{j=1}^{n} j^r a_j e^{-\sigma j}, \quad k \geq 1.$$

לפיכך, הסמיאינווריאנטים המ.א.$V_n^{(\bar{r})}$ ו-$V_n^{(r)}$ הם:

$$s_k^{(\bar{r})} = \sum_{j=1}^{\bar{r}} j^k a_j e^{-\sigma j}, \quad s_k^{(r)} = \sum_{j=r}^{n} j^k a_j e^{-\sigma j}.$$

את בחירת הפרמטר חופשי σ נעשה לפי העקרון הקודם:

$$E(V_n^{(\bar{r})}) = \sum_{j=1}^{(\bar{r})} j a_j e^{-\sigma j} = n \quad (46)$$

ו-

$$E(V_n^{(r)}) = \sum_{j=r}^{n} j a_j e^{-\sigma j} = n, \quad n \geq 1 \quad (47).$$

קל להוכיח שלכל אחת ממשוואות הנ"ל קיים פיתרון והוא יחיד, $\sigma_n^{(\bar{r})}$ ו- $\sigma_n^{(r)}$ בהתאמה.
את התוצאות הבאות ננסח עבור תת קבוצה הבאה של מחלקת $\mathcal{F}_l$ המבנים האקראים הפרי-
קים:

$$\mathcal{F}_l' = \{a_j \sim j^{l-1}, \quad l > 0\}.$$

למה: יהיו $\bar{r}=n^{\bar{\beta}}$ ו-$r=n^{\beta}$ כאשר $0\le\bar{\beta},\beta\le 1$.

(i) אם $(l+1)^{-1}<\bar{\beta}\le 1$ ו- $0\le\beta<(l+1)^{-1}$, אזי

$$\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}\sim\sigma_n^{(r)}\sim\Big(\Gamma(l+1)\Big)^{\frac{1}{l+1}}n^{-\frac{1}{l+1}},\quad l>0,\quad n\to\infty.$$

(ii) אם $0<\bar{\beta}<(l+1)^{-1}$ ו- $(l+1)^{-1}<\beta<1$, אזי

$$\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}\sim-\frac{\bar{\gamma}\log n}{n^{\bar{\beta}}}(1+\bar{\delta}_n),\quad l>0,\quad n\to\infty,$$

כש-

$$\bar{\gamma}=1-(l+1)\bar{\beta},\qquad\bar{\delta}_n=\frac{\log(\bar{\gamma}\log n)}{\bar{\gamma}\log n},$$

ו-

$$\sigma_n^{(r)}\sim\frac{\gamma\log n}{n^{\beta}}(1-\delta_n),\quad l>0,\quad n\to\infty,$$

כש-

$$\gamma=(l+1)\beta-1,\qquad\delta_n=\frac{\log(\gamma\log n)}{\gamma\log n}.$$

(iii) אם $\beta=\bar{\beta}=(l+1)^{-1}$, אזי

$$\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}\sim\bar{A}n^{-\frac{1}{l+1}},\quad l>0,\quad n\to\infty$$

ו-

$$\sigma_n^{(r)}\sim An^{-\frac{1}{l+1}},\quad l>0,\quad n\to\infty,$$

כש- $\bar{A},A>0$ מוגדרים כפתרונות יחידים של המשוואות

$$\bar{A}^{l+1}=\int_0^{\bar{A}}t^le^{-t}dt$$

ו-

$$A^{l+1}=\int_A^{\infty}t^le^{-t}dt$$

בהתאמה.

הוכחה:

א. חומר רקע: פונקצית גמא.

הפונקציה Γ היא המצאתו של $Euleur$ משנת 1729 שמטרתה היתה להרחיב את הפונקציה $n!$ ממספרים טבעיים למספרים מרוכבים.הפונקציה Γ מוגדרת ע"י:

$$\Gamma(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{k!k^x}{(x+1)_k},$$

$$x \in \mathcal{C}, \quad x \neq -n, \quad n \geq 0,$$

כאשר

$$(x)_k := x(x+1)\dots(x+k-1), \quad k \geq 1, \quad (x)_0 = 1.$$

הוכח שהגבול הנ"ל קיים בתחום $x \in \mathcal{C}, \quad x \neq -n, \quad n \geq 0$.
קל לוודא שבתחום הנ"ל,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

אמנם,

$$\Gamma(x+1) = \lim_{k\to\infty} \frac{k!k^{x+1}}{(x+2)_k} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k!k^x}{(x+1)_k}\frac{k(x+1)}{x+k} = (x+1)\Gamma(x).$$

מזה נובע ש- $\Gamma(n) = n!, \ n \geq 1$. העובדה חשובה היא שבתחום $Re(x) > 0$ הפונקציה Γ ניתנת ע"י הצגה אינטגרלית:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad Re(x) > 0.$$

נציין ש- $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1}, \ t \to 0$, כך שהאינטגרל קיים כש-$Re(x) > 0$ ומתבדר כש- $Re(x) \leq 0$. להצגה הנ"ל ישנה המשכה אנליטית לכל מישור $\mathcal{C}$ למעט נקודות $\{-n, \ n \geq 0\}$ שהן קוטבים פשוטים של הפונקציה Γ.

ב.בגלל יחידות הפתרון של כל אחת מהמשוואות הנ"ל, מספיק לודא שכל אחת מהנוסחאות אסימפטוטיות $(i) - (iii)$ מקיימת את המשוואה המתאימה.כמו קודם, הכלי שלנו לאנליזה אסימפטוטית הוא נוסחת סכמה של $Euleur$.ראשית נפעיל את הנוסחה עבור הפונקציה $f(x,\sigma) = x^l e^{-\sigma x}, \ l > 0$ כדי לרשום את המשוואות (46)ו- (47) בצורה אסימפטוטית, כש-$n \to \infty$.
אחרי הצבה $u\sigma = x$ מתקבל:

$$n \sim \Big(|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|\Big)^{-(l+1)} \int_{|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|}^{r|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|} t^l \exp\Big(-tsign(\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})})\Big)dt$$

ו-

$$n \sim \Big(|\sigma_n^{(r)}|\Big)^{-(l+1)} \int_{r|\sigma_n^{(r)}|}^{n|\sigma_n^{(r)}|} t^l \exp\Big(-tsgn(\sigma_n^{(r)}\Big)dt.$$

(48)

בהמשך נסמן לשם קיצור ב-$\bar{I}(n), I(n)$ האינטגרלים שבנוסחאות הנ"ל
$(i.)$ מתקיים

$$|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}| \to \infty, \quad n \to \infty$$

ו-

$$|r\sigma_n^{(r)}| \to 0, \quad n \to \infty. \Rightarrow$$

$$\bar{I}(n), I(n) \to \Gamma(l+1), \quad l > 0,$$

כי

$$\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}, \sigma_n^{(r)} > 0. \Rightarrow$$

$$\left(|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|\right)^{-(l+1)} \bar{I}(n) \sim n$$

ו-

$$\left(|\sigma_n^{(r)}|\right)^{-(l+1)} I(n) \sim n.$$

מ.ש.ל.

(ii). כאן $\bar{\gamma}, \gamma > 0$. לכן

$$\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} < 0, \ \sigma_n^{(r)} > 0.$$

$\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} < 0$ נובעת מכך שבמקרה שבנידון "מספר המחוברים שבסכום לא גדול מספיק, כך שכדי שהסכום יהיה שווה ל-n, כש-n גדול,
דרוש שהאקספוננטה תיהי גדולה מ-1".
מתקיים:

$$|\bar{r}\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}| = \bar{\gamma}(1+\bar{\delta_n}) \log n \to \infty, \quad n \to \infty$$

ו-

$$|r\sigma_n^{(r)}| = \gamma(1+\delta_n) \log n \to \infty, \quad n \to \infty. \Rightarrow$$

$$\bar{I}(n) \to \infty,$$

כי

$$\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} < 0.$$

כעת נמצא את האסימפטוטיקה של האינטגרל $\bar{I}(n)$. לשם כך נשתמש בכלל לופיטל. מתקיים:

$$\left(|\bar{r}\bar{\sigma}_n|\right)_n' = \bar{\gamma}\left(\log n + \frac{\log(\bar{\gamma}\log n)}{\bar{\gamma}}\right)_n' =$$

$$\bar{\gamma}n^{-1}\left(1 + \frac{1}{\bar{\gamma}\log n}\right).$$

$$\left(\bar{I}(n)\right)_n' \sim \left(|\bar{r}\bar{\sigma}_n|\right)^l e^{|\bar{r}\bar{\sigma}_n|}\left(|\bar{r}\bar{\sigma}_n|\right)_n', \quad (48)$$

כאשר

$$e^{|\bar{r}\bar{\sigma}_n|} = n^{\bar{\gamma}}(\bar{\gamma}\log n).$$

לכן את (48) נתן לרשום כ-

$$\left(\bar{I}(n)\right)_n' \sim (\bar{\gamma}\log n)^{l+1}(1+\bar{\delta}_n)^l n^{\bar{\gamma}-1}\bar{\gamma}\left(1 + \frac{1}{\bar{\gamma}\log n}\right) \sim$$

$$(\bar{\gamma}\log n)^{l+1} n^{-(l+1)\bar{\beta}}, \quad n \to \infty.$$

לפי כלל לופיטל, זה אומר ש-

$$\bar{I}(n) \sim (\bar{\gamma}\log n)^{l+1} n^{-(l+1)\bar{\beta}+1} = (\bar{\gamma}\log n)^{l+1} n^{\bar{\gamma}} \Rightarrow$$

$$\left(|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|\right)^{-(l+1)} \bar{I}(n) \sim n, \quad n \to \infty.$$

החוכחה עבור r דומה.

(iii) במקרה שבנידון, מתקיים:

$$\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}, \sigma_n^{(r)} > 0,$$

$$\bar{r}\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} \to \bar{A}, \quad r\sigma_n^{(r)} \to A, \quad n\sigma_n^{(r)} \to \infty, \quad n \to \infty.$$

לכן אחרי הצבתם של הפתרונות באגף ימני של (48) נקבל בהתאמה:

$$\left(|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|\right)^{-(l+1)} \bar{I}(n) \sim \bar{A}^{-(l+1)} n \int_0^{\bar{A}} t^l e^{-t} dt = n$$

ו-

$$\left(|\sigma_n^{(r)}|\right)^{-(l+1)} I(n) \sim A^{-(l+1)} n \int_A^{\infty} t^l e^{-t} dt = n$$

בשני המקרים השלב האחרון נובע מהגדרות של $\bar{A}, A$. נשאר רק לודא ש-$\bar{A}, A$ הם פתרונות חיוביים יחידים של המשוואת שבטענת הלמה. הפונקצי

$$F(\bar{A}) := \int_0^{\bar{A}} t^l e^{-t} dt \to \Gamma(l+1), \quad \bar{A} \to \infty, F(0) = 0.$$

מזה נובע שהגרפים של שתי הפונקציות $F(\bar{A})$ ו-$\bar{A}^{(l+1)}$ נפגשים בנקודה אחת בלבד.אותו נימוק תקף גם עבור A. מ.ש.ל.

מסקנה: אסימפטוטיקה הפרמטרים B_2 ו-s_3.

יהיו $\sigma_n^{(r)}, \bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}$ נתונים לפי למה. אז כש-$n \to \infty$ ו-$h > 0$ קבוע (כלומר לא תלוי ב- n),

$$\bar{B}^2 \sim h \begin{cases} n\left(\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}\right)^{-1}, & \text{אם} \quad (l+1)^{-1} \le \bar{\beta} \le 1 \\ n\bar{r}, & \text{אם} \quad 0 < \bar{\beta} < (l+1)^{-1}, \end{cases}$$

$$B^2 \sim h \begin{cases} n\left(\sigma_n^{(r)}\right)^{-1}, & \text{אם} \quad 0 \le \beta \le (l+1)^{-1} \\ nr, & \text{אם} \quad (l+1)^{-1} < \beta < 1. \end{cases}$$

ו-

$$\bar{s_3} \sim h\frac{(\bar{B}^2)^2}{n}, \quad s_3 \sim h\frac{(B^2)^2}{n}, \qquad n \to \infty.$$

הוכחה: מתקיים,

$$\bar{B}_n^2 = \bar{s}_2 \sim \sum_{j=1}^{\bar{r}} j^{l+1} e^{-j\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}}$$

$$\sim \Big(|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|\Big)^{-(l+2)} \int_{|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|}^{r|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|} t^{l+1} \exp\Big(-t sign(\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})})\Big) dt. \tag{49}$$

תחילה נתבונן במקרה $1 \le \bar{\beta} \le (l+1)^{-1}$. מ-$(49)$,

$$\bar{B}_n^2 \sim \Big(\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}\Big)^{-(l+2)} \int_0^{h_1} t^{l+1} \exp(-t) dt,$$

כש-

$$h_1 = \begin{cases} \Big(\Gamma(l+1)\Big)^{\frac{1}{l+1}}, & \text{אם } \bar{\beta} = (l+1)^{-1} \\ \infty, & \text{אם } \bar{\beta} > (l+1)^{-1}. \end{cases}$$

כתוצאה מכך,

$$\bar{B}_n^2 \sim hn\Big(\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}\Big)^{-1}.$$

באופן דומה מתקבלות שאר הטענות המסקנה.

הערה:נקודות קריטיות ומעבר פזה.

ניתוח תוצאות הלמה מראה שההתנהגות האסימפטוטית של הפרמטר σ כפונקציה של $r = n^{\beta}$ משתנה באופן מהותי כש- β עובר דרך נקודה $\frac{1}{l+1}$, $l > 0$,במילים אחרות, $\beta = \frac{1}{l+1}$ היא נקודת קפיצה של הפונקציה $\sigma_n = \sigma_n(\beta)$, עבור n גדול.
במדעי טבע לנקודות מסוג זה קוראים נקודות קריטיות $(= Critical \quad Points)$ של מודל.

בפרט, בפיזיקה סטטיסטית נהוג לומר שבמודל מתרחש מעבר פזה $(= Phase \quad Transition)$.
בהמשך נראה השפעתה הנקודה הקריטית הנ"ל על תמונת ההתקבצות החלוקות הנוצרות ע"י המודל.

משפט גבול לוקלי.

יהיו $\sigma_n^{(r)}$, $\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}$ כמו בלמה. אזי מתקיים:

$$P(V_n^{(r)} = n) \sim (2\pi B_n^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad n \to \infty,$$

$$P(\bar{V}_n^{(\bar{r})} = n) \sim (2\pi \bar{B}_n^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad n \to \infty.$$

הוכחה:ראינו ש-

$$P(\bar{V}_n^{(\bar{r})} = n) = \int_0^1 \phi^{(\bar{r})}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha,$$

כאשר הפונקציה אופיינית $\phi^{(\bar r)}$ במקרה של אספים נתונה ע"י

$$\phi^{(\bar r)}(\alpha) = \exp\Big(\sum_{j=1}^{\bar r} a_j e^{-j\bar\sigma_n^{(\bar r)}}(e^{2\pi i\alpha j}-1)\Big), \quad \alpha\in R.$$

בהסתמך על כך שהפונקציה $\phi^{(\bar r)}$ מחזורית עם מחזור שווה ל-1,

$$P(\bar V_n^{(\bar r)} = n) = \int_{-1/2}^{1/2} \phi^{(\bar r)}(\alpha)\, e^{-2\pi i\alpha n} d\alpha :=$$

$$\bar T_1(n) + \bar T_2(n), \quad n\geq 1,$$

כאשר אנו סימנו

$$\bar T_1 = \bar T_1(n) = \int_{-\bar\alpha_0(n)}^{\bar\alpha_0(n)} \phi^{(\bar r)}(\alpha)\, e^{-2\pi i\alpha n} d\alpha,$$

$$\bar T_2 = \bar T_2(n) = \int_{-1/2}^{-\bar\alpha_0(n)} \phi^{(\bar r)}(\alpha)\, e^{-2\pi i\alpha n} d\alpha +$$

$$\int_{\bar\alpha_0(n)}^{1/2} \phi^{(\bar r)}(\alpha)\, e^{-2\pi i\alpha n} d\alpha.$$

לפי המסקנה מלמה, מתקיים תנאי לפונוב:

$$\frac{\bar s_3}{\bar B^3} \to 0, \quad n\to\infty.$$

עתה נרשום

$$\bar\alpha_0 \bar s_3 = (\bar\alpha_0 \bar B)^3 \frac{\bar s_3}{\bar B^3}$$

כדי להסיק מסקנה שקיים $\bar\alpha_0 = \bar\alpha_0(n)$ כך ש-

$$\lim_{n\to\infty} \bar\alpha_0 \bar B = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \bar\alpha_0^3 \bar s_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\bar T_1 \sim \int_{-\bar\alpha_0}^{\bar\alpha_0} \exp\left(-2\pi^2\alpha^2\bar B^2\right) d\alpha =$$

$$\frac{1}{2\pi\bar B}\int_{-2\pi\bar\alpha_0\bar B}^{2\pi\bar\alpha_0\bar B} \exp(-\frac{z^2}{2})dz \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar B^2}}, \quad n\to\infty.$$

כעת נציין דרך הוכחה ש- $\bar T_2 = o(\bar T_1),\ n\to\infty$.מתקיים:

$$|\bar T_2| = 2|\int_{\bar\alpha_0}^{1/2} \bar\varphi^{(\bar r)}(\alpha) e^{-2\pi i\alpha n} d\alpha|.$$

$$|\bar{\varphi}^{(\bar{r})}(\alpha)| = \exp\left(-2\sum_{j=1}^{\bar{r}} a_j e^{-j\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}} \sin^2 \pi\alpha j\right), \quad \alpha \in R.$$

$$\bar{V}_n^{(\bar{r})}(\alpha) = 2\sum_{j=1}^{\bar{r}} a_j e^{-j\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}} \sin^2 \pi\alpha j, \quad \bar{\alpha}_0 \leq \alpha \leq 1/2.$$

קל לודא ש-

$$\bar{\alpha}_0^2 = \frac{\log^4(\bar{B}^2)}{\bar{B}^2},$$

מקיים תנאי לפונוב. ניתן להוכיח שעבור בחירת ה-$\bar{\alpha}_0$ הנ"ל,

$$e^{-\bar{V}_n^{(\bar{r})}(\alpha)} = o(\bar{B}^{-1}), \quad \bar{\alpha}_0 \leq \alpha \leq 1/2, \quad n \to \infty. \Rightarrow$$

$$\bar{T}_2 = o(\bar{T}_1),\ n \to \infty.$$

את טענת המשפט עבור $P(V_n^{(r)} = n)$ מוכיחים בדרך דומה. מ.ש.ל.

מסקנה: נוסחאות אסימפטוטיות עבור $c_n^{(r)}, \bar{c}_n^{(\bar{r})}$.

יהיו $r = n^{\beta},\ 0 < \beta \leq 1$ ו-$\bar{r} = n^{\bar{\beta}},\ 0 \leq \bar{\beta} \leq 1$. אזי

$$c_n^{(r)} \sim (2\pi B^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\Big(S_n^{(r)}(e^{-\sigma_n^{(r)}}) + n\sigma_n^{(r)}\Big), \quad n \to \infty,$$

$$(50),$$

$$\bar{c}_n^{(\bar{r})} \sim (2\pi \bar{B}^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\Big(\bar{S}_n^{(\bar{r})}(e^{-\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}}) + n\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}\Big), \quad n \to \infty,$$

$$(51)$$

כאשר

$$S_n^{(r)}(e^{-\sigma_n^{(r)}}) \sim h\frac{n^2}{B^2}, \quad (52)$$

$$\bar{S}_n^{(\bar{r})}(e^{-\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}}) \sim h\frac{n^2}{\bar{B}^2}, \quad n \to \infty, \quad (53).$$

הוכחה:הנוסחאות $(50), (51)$ מתקבלות ממשפט הגבול הלוקלי ומהצגות $Khintchine$, בעוד ש-$(52), (53)$ מתקבלות בעזרת
נוסחת סכמה של $Euleur$.אמנם,

$$\bar{S}_n^{(\bar{r})}(e^{-\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}}) \sim$$

$$\Big(|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|\Big)^{-l} \int_{|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|}^{r|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|} t^{l-1} \exp\Big(-t sign(\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})})\Big) dt :=$$

$$\left(|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|\right)^{-l}\bar{I}_n(l-1)$$

ו-

$$S_n^{(r)}(e^{-\sigma_n^{(r)}}) \sim$$

$$\left(|\sigma_n^{(r)}|\right)^{-l}\int_{r|\sigma_n^{(r)}|}^{n|\sigma_n^{(r)}|} t^{l-1}\exp\Big(-tsgn(\sigma_n^{(r)}\Big)dt :=$$

$$\left(|\sigma_n^{(r)}|\right)^{-l}I_n(l-1).$$

מזה נובע ש-

$$\frac{\bar{S}_n^{(\bar{r})}(e^{-\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}})}{n} \sim \bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}\frac{\bar{I}_n(l-1)}{\bar{I}_n(l)}$$

ו-

$$\frac{S_n^{(r)}(e^{-\sigma_n^{(r)}})}{n} \sim \sigma_n^{(r)}\frac{I_n(l-1)}{I_n(l)}.$$

נתבונן במקרה $0<\bar{\beta}<(l+1)^{-1}$. לפי למה, במקרה הזה,

$$\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}<0, \quad |\bar{r}\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|\to\infty, \quad n\to\infty.$$

לכן,

$$\frac{\bar{I}_n(l-1)}{\bar{I}_n(l)} \sim \frac{|\bar{r}\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|^{l-1}}{|\bar{r}\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|^{l}} \Rightarrow$$

$$\frac{\bar{S}_n^{(\bar{r})}(e^{-\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}})}{n} \sim \frac{1}{\bar{r}} \Rightarrow$$

$$\bar{S}_n^{(\bar{r})}(e^{-\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}}) \sim \frac{n^2}{n\bar{r}} \sim h\frac{n^2}{\bar{B}^2},$$

כאשר המעבר האחרון נובע ממסקנה מלמה. באותה דרך מוכיחים את הטענה בשאר המקרים.

בעזרת התוצאות הקודמות אפשר כעת לגשת לחקר אסיפטוטיקת ההסתברויות

$$\bar{d}_n^{(\bar{r})} := P(\bar{q}_n\le\bar{r}) = \frac{\tilde{c}_n^{(\bar{r})}}{\tilde{c}_n}$$

ו-

$$d_n^{(r)} := P(q_n\ge r) = \frac{\tilde{c}_n^{(r)}}{\tilde{c}_n}.$$

משפט על ההתקבצות המסה.
במקרה של אספים $Expansive$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \bar{d}_n^{(\bar{r})} = \begin{cases} 0, & \text{אם} \quad 0 \le \bar{\beta} \le (l+1)^{-1} \\ 1, & \text{אם} \quad (l+1)^{-1} < \bar{\beta} \le 1. \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n^{(r)} =$$

$$\begin{cases} 0, & \text{אם} \quad r = n^{\beta}, \quad 0 < \beta \le 1 \\ \exp\Big(- \sum_{j=1}^{r-1} a_j \Big), & \text{אם} \quad r \ge 2 \quad \text{מספר סופי}. \end{cases}$$

הוכחה: נציין ש- $\tilde{c}_n = \tilde{c}_n^{(\bar{n})}$. ונגדיר

$$\Delta_n^{(\bar{r})} := \bar{S}_n^{(\bar{r})} \left(e^{-\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}} \right) - \bar{S}_n^{(n)} \left(e^{-\bar{\sigma}_n^{(n)}} \right) + n \left(\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} - \bar{\sigma}_n^{(n)} \right).$$

מטרתינו הראשונה היא להראות ש-

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n^{(\bar{r})} = \begin{cases} -\infty, & \text{אם} \quad 0 < \bar{\beta} \le (l+1)^{-1} \\ 0, & \text{אם} \quad (l+1)^{-1} < \bar{\beta} \le 1. \end{cases} (54).$$

החלק הראשון של (54) נובע ישירות מהאנליזה האסימפטוטית הקודמת.אמנם, במקרה הזה,

$$\bar{S}_n^{(\bar{r})}(e^{-\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}}) \sim h\frac{n^2}{\bar{B}^2} \sim h_1 n^{1-\bar{\beta}}, \quad 0 < \bar{\beta} \le (l+1)^{-1}$$

ו-

$$n\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} \sim n\Big(- \frac{\bar{\gamma}\log n}{n^{\bar{\beta}}}(1+\bar{\delta}_n)\Big) \sim$$

$$-hn^{1-\bar{\beta}} \log n \to -\infty, \quad n \to \infty,$$

כאשר $0 < \bar{\beta} < \frac{1}{l+1}$. בעוד ש-

$$\bar{S}_n^{(n)} \left(e^{-\bar{\sigma}_n^{(n)}} \right) \sim h\frac{n^2}{\bar{B}^2} \sim h\frac{n^2}{n\left(\bar{\sigma}_n^{(\bar{n})}\right)^{-1}} \sim h_2 n^{1-\frac{1}{l+1}}$$

ו-

$$n\bar{\sigma}_n^{(\bar{n})} \sim hn^{1-\frac{1}{l+1}}.$$

כתוצאה מכך מקבלים:

$$\Delta_n^{(\bar{r})} \sim -hn^{1-\bar{\beta}} \log n \to -\infty, \quad n \to \infty,$$

כאשר $0<\bar\beta<\frac{1}{l+1}$. במקרה $\bar\beta=\frac{1}{l+1}$, דבר מיוחד הוא ש-

$$\bar\sigma_n^{(\bar r)} \sim \bar A n^{-\frac{1}{l+1}}, \quad \bar\sigma_n^{(\bar n)} \sim h n^{-\frac{1}{l+1}},$$

כך שכדי לגלות ההתנהגות אסימפטוטית של $n\left(\bar\sigma_n^{(\bar r)}-\bar\sigma_n^{(n)}\right)$ צריך לקחת בחשבון את הקבוע-ים $h, \bar A$. לפי למה,

$$\bar A^{l+1}=\int_0^{\bar A} t^l e^{-t}dt<\Gamma(l+1).$$

לכן,

$$\bar A<h=\Big(\Gamma(l+1)\Big)^{\frac{1}{l+1}} \Rightarrow$$

$$n\bar\sigma_n^{(\bar r)}-n\bar\sigma_n^{(\bar n)} \to -\infty, \qquad n\to\infty.$$

באותו אופן מוכיחים שגם

$$\bar S_n^{(\bar r)}\left(e^{-\bar\sigma_n^{(\bar r)}}\right)-\bar S_n^{(n)}\left(e^{-\bar\sigma_n^{(n)}}\right)\to-\infty.$$

חשוב לציין שבמהלך ההוכחה קיבלנו שבמקרה $0<\bar\beta\le\frac{1}{l+1}$ ש-

$$\Delta_n^{(\bar r)}\le -n^{\gamma},$$

עם $\gamma>0$ מסויים. מזה נובע חלק ראשון של טענת המשפט עבור $\lim_{n\to\infty}\bar d_n^{(\bar r)}$, בשל העובדה ש-$\bar B_n^{(\bar r)}\sim hn^{\gamma},\ \gamma>0$.
במקרה המתאים לחלק השני של (54),

$$\bar\sigma_n^{(n)}\sim\bar\sigma_n^{(\bar r)}, \quad n\to\infty,$$

ומשום כך

$$\bar S_n^{(\bar r)}\left(e^{-\bar\sigma_n^{(\bar r)}}\right)\sim\bar S_n^{(n)}\left(e^{-\bar\sigma_n^{(n)}}\right), \quad n\to\infty.$$

משום כך כאן יש צורך באנליזה יותר עדינה. מהשיוויון

$$\sum_{j=1}^{\bar r} ja_j e^{-\sigma_n^{(\bar r)j}}-\sum_{j=1}^{n} ja_j e^{-\sigma_n^{(\bar n)j}}=0, \quad n\ge1$$

ומלמה נובע ש-
$\bar\sigma_n^{(\bar n)}>\bar\sigma_n^{(\bar r)}\ge0,$ וש-

$$n(\bar\sigma_n^{(n)}-\bar\sigma_n^{(\bar r)})\to0,\ n\to\infty.$$

אמנם,במקרה שבנידון

$$\left(\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}\right)^{-(l+1)} \int_{\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}}^{r\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}} t^l \exp(-t)dt =$$

$$\left(\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}\right)^{-(l+1)} (\Gamma(l+1) - \epsilon_1(n)),$$

כאשר

$$\epsilon_1(n) = \Gamma(l+1) - \int_{\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}}^{r\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}} t^l \exp(-t)dt \sim$$

$$\exp\left(-\bar{r}\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}\right)\left(\bar{r}\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}\right)^l, \; n \to \infty,$$

לפי כלל לופיטל. משום כך,

$$n^p \epsilon_1(n) \to 0, n \to \infty,$$

עבור כל p

$$\Rightarrow$$

$$n\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} = (\Gamma(l+1))^{\frac{1}{l+1}} n^{\frac{l}{l+1}} + v_{n,1}, \quad v_{n,1} \to 0, \quad n \to \infty.$$

ובאותו אופן,

$$n\bar{\sigma}_n^{(n)} = (\Gamma(l+1))^{\frac{1}{l+1}} n^{\frac{l}{l+1}} + v_{n,2}, \quad v_{n,2} \to 0, \quad n \to \infty.$$

זה מוכיח את הטענה. בעזרת אותם נימוקים מוכיחים ש-

$$\bar{S}_n^{(\bar{r})}\left(e^{-\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}}\right) - \bar{S}_n^{(n)}\left(e^{-\bar{\sigma}_n^{(n)}}\right) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

בסיכומו של דבר מתקבלת הטענה השניה של המשפט לגבי $\bar{d}_n^{(\bar{r})}$. עתה נתאר דרך החוכחה טענת המשפט לגבי $d_n^{(r)}$.

יהי $r \geq 2$ מספר סופי נתון כלשהו. אזי

$$\sigma_n^{(r)} \sim \sigma_n^{(1)}, \quad n \to \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sigma_n^{(r)} - \sigma_n^{(1)}\right) = 0.$$

בהמשך נרשום

$$S_n^{(r)}\left(e^{-\sigma_n^{(r)}}\right) - S_n^{(1)}\left(e^{-\sigma_n^{(1)}}\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j e^{-\sigma_n^{(1)} j}\left(e^{-(\sigma_n^{(r)} - \sigma_n^{(1)})j} - 1\right) - \sum_{j=1}^{r-1} a_j e^{-\sigma_n^{(r)} j}.$$

(55)

מתקיים, $0 \geq \sigma_n^{(r)} > \sigma_n^{(1)}$ ו-

$$e^{-(\sigma_n^{(1)}-\sigma_n^{(r)})j}-1=-\Big(\sigma_n^{(1)}-\sigma_n^{(r)}\Big)j(1-\delta_n),$$

, כאשר $\delta_n=\delta_n(j)\to 0,\ n\to\infty$, באופן אחיד ביחס לכל $1\leq j\leq n$. משום כך,

$$\sum_{j=1}^{n}a_je^{-\sigma_n^{(1)}j}\left(e^{-(\sigma_n^{(r)}-\sigma_n^{(1)})j}-1\right)=$$

$$-\Big((\sigma_n^{(1)}-\sigma_n^{(r)})(1-\delta_n)\Big)\sum_{j=1}^{n}ja_je^{-\sigma_n^{(1)}j}=$$

$$-\Big((\sigma_n^{(1)}-\sigma_n^{(r)})(1-\delta_n)\Big)n\to 0,\quad n\to\infty.$$

בעוד שהסכום השני שהוא סכום מספר סופי של איברים שואף ל-

$$\sum_{j=1}^{r-1}a_j$$

. מ.ש.ל.

<u>תמונת ההתקבצות:אספים, $l>0$</u>

- התנהגות של $\sigma_n^{(r)},\ \bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}$.

  יהיו $r=n^{\beta},\ \bar{r}=n^{\bar{\beta}}$.נקפיא את n מספיק גדול ונתבונן בהתנהגות של σ -ות כפונקציות של β בלבד. ראינו ש-

$$\frac{1}{l+1}$$

היא נקודה קריטית של הפרמטר β.

ניתוח תוצאות המשפט.
המשפט מראה שבהתנהגות ההסתברויות

$$\bar{d}_n^{(\bar{r})}:=P(\bar{q}_n\leq\bar{r})$$

ו-

$$d_n^{(r)}:=P(q_n\geq r)$$

כמו כן מתרחש מעבר פזה ביחס לפרמטר β באותה נקודה

$$\frac{1}{l+1}$$

. ממשפט נובע שעבור n מספיק גדול

(i) ההסתברות שבחלוקה של n יהיה רכיב (=קבוצה) בגודל $n^{\frac{1}{l+1}}$ שווה ל-0, לפי הגדרת פונקציה התפלגות;

(ii) עבור כל p סופי נתון, המ.א. $K_1^{(n)},\dots,K_p^{(n)}$ הם בלתי תלויים ומפולגים $Po(a_j),\ j=1,\dots,p$, בהתאמה.

לאור זה, המספר $n^{\frac{1}{l+1}}$ נקרא $Threshold$=סף עבור גודל הקבוצה.