

נושאים נבחרים בהסתברות - 106935

מבנים אקראיים פריקים

מרצה: ברוך גרנובסקי.

סיפרות:

Arratia, R., Barbour, A. and Tavaré, S. (2004).

Logarithmic combinatorial structures: a probabilistic approach.

Kolchin, V. (1999). Random graphs. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge Univ. Press.

Freiman, G., Granovsky, B. (2004) Clustering in coagulation-fragmentation processes, random combinatorial structures and additive number systems: Asymptotic formulae and limiting laws, Tr.AMS, v.357,6,

Granovsky, B., Stark, D. (2006) Asymptotic enumeration and logical limit laws for expansive multisets and selections, J. London Math.Soc.,(2),73.

מבוא: חלוקות של מספר טבעי

הגדרה 1. לחלוקה של מספר $n \in N^+ := \{0, 1, 2, \dots\}$ קוראים וקטור

$$\eta = (k_1, \dots, k_n) : \sum_{j=1}^n j k_j = n, \quad k_j \in N^+.$$

ל- $|\eta| := k_1 + \dots + k_n$ קוראים מספר מחוברים (= קבוצות) $\Omega_n = \{\eta\}$ קוראים מרחב חלוקות של n .
דוגמא: $10 = 3 + 3 + 1 + 3 = 2 + 4 + 4$ כאן:

$$\eta_1 = (1, 0, 3, 0, \dots, 0) = 1^1 3^3 \in \Omega_{10}$$

$$\eta_2 = (0, 1, 0, 2, 0, \dots, 0) = 2^1 4^2 \in \Omega_{10}.$$

תאור גאומטרי של החלוקות ניתן ע"י דיאגרמות *Young*.
כאן $\zeta \in \Omega_n$ מיוצגת ע"י וקטור

$$\zeta = (l_1, \dots, l_m) : l_1 \geq \dots \geq l_m > 0 : l_1 + \dots + l_m = n.$$

ומתקיים:

$$-|\zeta| = m \text{ אורך העמודה הראשונה.}$$

נסמן: $|\Omega_n| := p_n$ מספר כולל של חלוקות של n .
טענה: (פ' יוצרת חלוקות של Euler). *Euler*.

$$g(x) := \sum_{n \geq 0} p_n x^n = \prod_{j \geq 1} (1 - x^j)^{-1}, \quad |x| < 1, \quad p_0 = 1.$$

הוכחה:

$$g(x) = \prod_{j \geq 1} \sum_{k \geq 0} x^{jk} := \sum_{n \geq 0} c_n x^n. \quad (1)$$

סימן:

$$[x^n]g(x) = c_n$$

לפי (1),

$$[x^n]g(x) = [x^n] \prod_{j=1}^n \sum_{k \geq 0} x^{jk} =$$

$$[x^n] \left(\sum_{k_1 \geq 0, \dots, k_n \geq 0} x^{1k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n} \right) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \Omega_n} 1 =$$

$$p_n.$$

מבנים פריקים

נתבונן במבנים כד שכול מבנה מגודל n הוא איחוד של n מבנים אי-פריקים שגודלם
כלומר k_1, \dots, k_n

$$n = \sum_{j=1}^n j k_j.$$

מאפיינים בסיסיים של מבנה פריק

π_n - מבנה פריק מגודל n ;

p_n - מספר מבנים פריקים מגודל n ;

m_j - מספר מצבים (=סוגים) של מבנה אי-פריק מגודל j ;

$\eta = (k_1, \dots, k_n) \in \Omega_n$ - ספקטרום (=ספקטרום מניות) של מבנה נתון π_n .

הערה: קיימת ההתאמה $\boxed{\pi_n \text{ מבנה}} \leftarrow \boxed{\eta \in \Omega_n \text{ ספקטרום}}$ שהיא בדרך כלל לא חד חד ערכית.

דוגמאות:

א. תמורות על $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

$$S_n = \{\pi_n\}, \quad |S_n| = n!$$

- אוסף של כל התמורות (= מבנים) $\pi_n = (\pi_n(1), \dots, \pi_n(n))$

כל תמורה ניתן לרשום כאיחוד של מעגלים כדלקמן: מעגל ראשון מתחיל מ-1, אחרי 1 בא מספר $\pi_n(1)$, אחרי $\pi_n(1)$ אחרי $\pi_n(\pi_n(1))$ וכו'. אחרי שהמעגל הראשון מסתיים, מתחילים מעגל חדש מהמספר הקטן ביותר בין המספרים שנותרו, וכך הלאה. למשל,

$$\pi_8 = (84357612) = (182457)(3)(6)$$

הצגה מעגלית של ה- π_8 .

כאן מעגלים הם מבנים (= רכיבים) אי-פריקים, כך ש- $m_j = (j-1)!$ מספר המעגלים מגודל j . מספר $N(k_1, \dots, k_n)$ תמורות π_n בעלות אותו ספקטרום $\eta = (k_1, \dots, k_n) \in \Omega_n$ ניתן ע"י נוסחת קושי (Cauchy):

$$N(k_1, \dots, k_n) = n! \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{j}\right)^{k_j} \frac{1}{(k_j)!}.$$

הוכחה (רמז): נוסחת מולטינום ו- $m_j = (j-1)!$ תרגיל:

$$\pi_8 = (84357612) = (182457)(3)(6) \rightarrow$$

$$\eta = (2, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0).$$

נמצא $N(2, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$ לפי נוסחת קושי,

$$N(2, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) = 8! \left(1^2 \frac{1}{2!} \frac{1}{6} \cdot 1\right)$$

$$= 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 3360.$$

הדמיה של תמורה אקראית ב- S_n :

מספר 1 מתחיל מעגל ראשון. מספר 2 תופס מקום מימינו של 1 (=מצטרף למעגל ראשון) בהסתברות $1/2$ ובהסתברות $1/2$ מתחיל מעגל חדש. התהליך נמשך כך שמספר k מתחיל מעגל חדש בהסתברות $1/k$ או באותה הסתברות $1/k$ הוא תופס מקום מימינו של כל אחד מ- $(k-1)$ מספרים אשר קדמו לו. נסמן π_n התמורה האקראית שנוצרה. מתקיים

$$P(\pi_n) = 1(1/2)(1/3) \dots (1/n) = \frac{1}{n!}.$$

ב. חלוקות משוקללות

מניחים שישנם m_j סוגים של מטבעות באותו השווי j , כאשר $j = 1, 2, \dots$. נתבונן בחלוקות של סכום כולל n ע"י המטבעות הנ"ל. כאן כל חלוקה תלויה בשווים של מטבעות ובסוגם כאחד. יהי p_n - מספר החלוקות משוקללות של n . אז פ' יוצרת של $\{p_n\}$ היא

$$g(x) = \prod_{j \geq 1} (1 - x^j)^{-m_j}, \quad |x| < 1$$

ג. גרפים

כל גרף על n קודקודים (=מבנה בגודל n) מתפרק למספר גרפים קשירים (מבנים אי-פריקים) כך ש- k_j הוא מספר הגרפים הקשירים על j קודקודים ומתקיים:

$$\eta = (k_1, \dots, k_n) \in \Omega_n.$$

כאן

$$p_n = 2^{\binom{n}{2}}.$$

ד. פולינומים מחזקה n מעל שדה סופי $GF(q^n)$
נזכיר שאופייני (=מציין) השדה q הוא מספר ראשוני. יהי

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

פולינום מעל שדה סופי $GF(q^n)$. אזי $p_n = q^n$.
כל פולינום f הנ"ל ניתן להציג כמכפלה של פולינומים אי-פריקים ב- $GF(q^n)$, כך ש k_j הוא מספר הגורמים האי-פריקים בחזקה j ו- $\eta = (k_1, \dots, k_n) \in \Omega_n$.
למשל, עבור $n = 6, q = 2$

$$f(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^2 + x - 1 = (x-1)^3(x+1)^3.$$

התהליכים סטוכסטיים של מזוג ופירוק

n חלקיקים זהים מחולקים לקבוצות (=גבישים) כך ש- k_j מספר הקבוצות בגודל j ו- $\eta = (k_1, \dots, k_n) \in \Omega_n$
מצב המערכת בכל רגע נתון מוגדר ע"י η . הקבוצות פועלות הדדית כך שבכל רגע נתון או שלא מתרחש דבר או מתרחש אחד משני אירועים הבאים:

- מזוג: שתי קבוצות שגודלם i ו- j מתמזגות לקבוצה אחת שגודלה $i + j$, כלומר

$$\eta = (k_1, \dots, k_n) \rightarrow \eta^{(i,j)} =$$

$$(k_1, \dots, k_i - 1, \dots, k_j - 1, \dots, k_{i+j} + 1, \dots, k_n).$$

- פירוק: קבוצה אחת שגודלה $i + j$ מתפרקת לשתי קבוצות שגודלם i ו- j , כלומר

$$\eta = (k_1, \dots, k_n) \rightarrow \eta^{(i,j)} =$$

$$(k_1, \dots, k_i + 1, \dots, k_j + 1, \dots, k_{i+j} - 1, \dots, k_n).$$

בעיות אסימפטוטיות של ספירת המבנים: ניסוח

- התנהגות אסימפטוטית של p_n כש- $n \rightarrow \infty$
- תהי $A_n \subset \{\pi_n\}$ תת קבוצה מבנים נתונה, כלומר A_n היא אוסף של מבנים π_n המקיימים תכונה מסוימת. יש למצא התנהגות אסימפטוטית של $|A_n|$, כש- $n \rightarrow \infty$.
אחת מהשיטות היעילות לפתרון היא שיטה הסתברותית. נגדיר צפיפות של A_n ב- $\{\pi_n\}$:

$$0 \leq \rho_n := \frac{|A_n|}{p_n} \leq 1.$$

אם U מידה אחידה על האוסף $\{\pi_n\}$ של כל המבנים, אזי

$$\rho_n = P(A_n).$$

מבנים פריקים אקראים: הגדרה ודוגמאות
 הגדרה 2: תהי U ההתפלגות האחידה על אוסף המבנים $\{\pi_n\}$, כלומר

$$U(\pi_n) = \frac{1}{|\{\pi_n\}|} = \frac{1}{p_n}, \quad \pi_n \in \{\pi_n\}.$$

אזי לאלמנט האקראי Π_n אשר נוצר קוראים מבנה אקראי ולו.א.

$$\mathcal{K}^{(n)} = \mathcal{K}^{(n)}(\Pi_n) = (K_1^{(n)}(\Pi_n), \dots, K_n^{(n)}(\Pi_n)),$$

כש $K_j^{(n)}(\Pi_n)$ מספר רכיבים אי-פריקים בגודל j
 ב- Π_n , קוראים ספקטרום של מבנה אקראי Π_n . דוגמא: תמורות ב- S_n .
 לפי נוסחת קושי,

$$P(\mathcal{K}^{(n)} = (k_1, \dots, k_n)) = \frac{N(k_1, \dots, k_n)}{p_n} =$$

$$\prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{j}\right)^{k_j} \frac{1}{(k_j)!}, \quad (k_1, \dots, k_n) \in \Omega_n.$$

הערה: ו.א. $\mathcal{K}^{(n)}$ מקבל ערכים ב- Ω_n . לעומת זה מבנה אקראי Π_n מקבל ערכים ב- $\{\pi_n\}$.
 קשר מותנה

תהי $\{Z_j, j \geq 1\}$ -סידרה של מ.א. ב.ת. ובעלי ערכים ב-

$$N^+ := \{0, 1, 2, \dots\},$$

כך ש-

$$P(Z_j = k) = a_k^{(j)}, \quad k \in N^+, \quad j \geq 1.$$

נגדיר סידרה של ו.א.

$$\{\mathcal{K}^{(n)} = (K_1^{(n)}, \dots, K_n^{(n)}), n \geq 1\}$$

הנוצרת ע"י הסידרה $\{Z_j, j \geq 1\}$ באופן הבא:

$$\mathcal{L}(\mathcal{K}^{(n)}) = \mathcal{L}(Z_1, \dots, Z_n | \sum_{j=1}^n jZ_j = n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

מתקיים:

$$P(\mathcal{K}^{(n)} = (k_1, \dots, k_n)) = \frac{\prod_{j=1}^n a_{k_j}^{(j)}}{P(\sum_{j=1}^n jZ_j = n)},$$

$$\eta = (k_1, \dots, k_n) \in \Omega_n, \quad n \geq 1.$$

$$c_n := P\left(\sum_{j=1}^n jZ_j = n\right) = \sum_{\eta \in \Omega_n} \prod_{j=1}^n a_{k_j}^{(j)},$$

$$\eta = (k_1, \dots, k_n)$$

נגדיר עתה מידה הסתברותית μ_n על מרחב סופי Ω_n :

$$\mu_n(\eta) := c_n^{-1} \prod_{j=1}^n a_{k_j}^{(j)}, \quad \eta = (k_1, \dots, k_n) \in \Omega_n. \quad (2)$$

כאן c_n נקראת פונקצית חלוקה של המידה. למידות מהצורה (2) קוראים "מולטיפליקטיוות" (Vershik, 1996) או מידות Gibbs-Pitman (Pitman, 2002).

מתקיים $\mathcal{K}^{(n)} \Leftrightarrow \mu_n$.

מסתבר שספקטרום של מגוון רחב מאוד של מבנים פריקים אקראיים מתקבל ע"י סה"כ שלוש ההתפלגויות הבאות של מ.א. Z_j : פואסוני, בינומי שלילי ובינומי.

טענה 1: תכונות כלליות של ספקטרום

א. הספקטרום $\mathcal{K}^{(n)}$ (=המידה μ_n) הוא אינוריאנטי תחת טרנספורמצית ההשתפעות (=) *tilting* של מ.א. $Z_j, j \geq 1$:

$$a_k^{(j)}(\theta) = b_j \theta^{jk} a_k^{(j)}, \quad k \geq 0, j \geq 1, \theta > 0$$

כש- $b_j = b_j(\theta)$ קבוע נירמול. ב. הצגה של Kolchin. יהי

$$\Omega_{n,k} := \{\eta \in \Omega_n : |\eta| = k\}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

אזי עבור כל $\eta \in \Omega_{n,k}$ מתקיים

$$P(\mathcal{K}^{(n)}(\Pi_n) = \eta \mid |\eta| = k) = c_{n,k}^{-1} \prod_{j=1}^n a_{k_j}^{(j)},$$

$$1 \leq k \leq n, \quad (3),$$

כלומר ההסתברות המותנית הנ"ל היא מידת גיבס על $\Omega_{n,k}$ עם פונקצית חלוקה

$$c_{n,k} = \sum_{\eta \in \Omega_{n,k}} \prod_{j=1}^n a_{k_j}^{(j)}.$$

הוכחה: א. מידית.
 ב. ההסתברות המותנית שבנידון שווה ל-

$$\frac{P\left(\mathcal{K}^{(n)}(\Pi_n) = \eta\right)}{P\left(|\mathcal{K}^{(n)}(\Pi_n)| = k\right)},$$

$$\eta \in \Omega_{n,k}. \quad (4)$$

כאן

$$P\left(|\mathcal{K}^{(n)}(\Pi_n)| = k\right) = \sum_{\eta \in \Omega_{n,k}} P\left(\mathcal{K}^{(n)}(\Pi_n) = \eta\right) :=$$

$$c_{n,k} \quad (5)$$

כעת נשאר להציב ב-(4) את (2) ו-(5). הערות: א. ל- θ קוראים פרמטר חופשי של מבנה אקראי. הוא משחק תפקיד חשוב בחקר בעיות אסימפטוטיות אשר הוזכרו קודם לכן.
 ב. מ-(3) נובע שעבור כל k נתון, ההסתברות המותנית על $\Omega_{n,k}$ הנגזרת ממידה מולטיפלי-קטיבית μ_n היא כמו כן מידה מולטיפליקטיבית.
שלושה סוגים עיקריים של מבנים אקראיים
 בהתאם לשלוש ההתפלגויות של מ.א. $Z_j, j \geq 1$ שהוזכרו קודם לכן, מבדילים בשלושת הסוגים הבאים של מבנים פריקים אקראיים:
 אספים (=Assemblies) רב קבוצות (=Multisets)
 מבחרים (=Selections).

את כל שלושת הסוגים של המבנים ניתן לתאר באופן סימלי עי"א אותה מערכת הבאה:

מבנה פריק בגודל n

אי-פריק (m_1)	... אי-פריק (m_2)	אי-פריק (m_n)
-----------------	---------------------	-----------------

כל מבנה π_n מורכב מ- k_1 מבנים אי-פריקים בגודל 1, ..., מ- k_n מבנים אי-פריקים בגודל n , כך ש- $(k_1, \dots, k_n) \in \Omega_n$. בהמשך נראה כי במקרה של אסיפות החלקיקים הם ממוספרים, במקרה של Multisets הם זהים ובמקרה של Selections בכל תא נכנס לא יותר מחלקיק אחד.

אנו נקבל את התפלגויות הספקטרומים ופונקציות יוצרות של סדרות $\{p_n\}$ עבור שלושת הסוגים של מבנים אקראיים.
 ראשית נגדיר מכפלת קושי עבור טורי חזקות. יהיו

$$f_1(x) = \sum_{i \geq 0} t_i x^i, \quad f_2(x) = \sum_{j \geq 0} r_j x^j,$$

שני טורי חזקות "פורמליים", כלומר ללא ציון רדיוס ההתכנסות שלהם.
 אזי מכפלת קושי $f = f_1 * f_2$ שלהם מוגדרת כדלקמן:

$$[x^n]f(x) = \sum_{i=0}^n t_i r_{n-i}, \quad n \geq 0.$$

טענה 2: פונקציה יוצרת של $\{c_n\}$

תהי $S^{(j)}(x) = \sum_{k \geq 0} a_k^{(j)} x^{kj}$ פונקצית יוצרת הסתברויות של מ.א. Z_j . אזי מכפלת קושי $g = \prod_{j \geq 1} S^{(j)}$ היא פונקצית יוצרת של הסידרה $\{c_n\}$. הוכחה:

$$[x^n]g(x) = [x^n] \prod_{j=1}^{\infty} S^{(j)}(x) = [x^n] \prod_{j=1}^n S^{(j)}(x) = \sum_{\eta \in \Omega_n} \prod_{j=1}^n a_{k_j}^{(j)} = c_n.$$

אנו נצטרך לשנות קנה מידה של כמה גודלים שהוצגו קודם. בהנחה ש-

$$a_0^{(j)} = P(Z_j = 0) > 0, \quad j \geq 1,$$

נגדיר

$$\tilde{a}_k^{(j)} := \frac{a_k^{(j)}}{a_0^{(j)}}, \quad j \geq 1$$

ובהתאם לזאת נגדיר

$$\tilde{c}_n = \left(\prod_{j=1}^n a_0^{(j)} \right)^{-1} c_n, \quad n \geq 1, \quad \tilde{c}_0 = 1.$$

לכן הפונקציות היוצרות של סדרות $\{\tilde{a}_k^{(j)}\}$ ו- $\{\tilde{c}_n\}$ הן בהתאמה $\tilde{S}^{(j)}$ ו- \tilde{g} :

$$\tilde{S}^{(j)}(x) = \frac{S^{(j)}(x)}{a_0^{(j)}}, \quad j \geq 1,$$

$$\tilde{g}(x) = \prod_{j \geq 1} \tilde{S}^{(j)}(x).$$

עתה קל לראות שאת נוסחת הספקטרום ניתן לרשום בעזרת גודלים מסולמים (=scaled) \tilde{c}_n כדלקמן:

$$P(\mathcal{K}^{(n)} = (k_1, \dots, k_n)) = \frac{\prod_{j=1}^n \tilde{a}_{k_j}^{(j)}}{\tilde{c}_n},$$

$$\eta = (k_1, \dots, k_n) \in \Omega_n, \quad n \geq 1. \quad (6)$$

מרישום הנ"ל נובע של- \tilde{c}_n ניתן לקרא פונקצית חלוקה מסולמת. בהמשך נראה שבכל שלושת המקרים הנ"ל של מבנים אקראיים, \tilde{g} היא פונקציה יוצרת של $\{p_n\}$. אסיפות.

במקרה הזה Z_j מפולג פואסוני עם פרמטר a_j :
לכן $Z_j \sim Po(a_j)$, $j \geq 1$

$$a_k^{(j)} = e^{-a_j} \frac{a_j^k}{k!}, \quad j \geq 1, \quad k \geq 0.$$

לכן,

$$\tilde{a}_k^{(j)} = \frac{a_j^k}{k!}, \quad j \geq 1, \quad k \geq 0$$

-1

$$P(\mathcal{K}^{(n)} = \eta) = (\tilde{c}_n)^{-1} \prod_{j=1}^n \frac{a_j^{k_j}}{k_j!}, \quad \eta \in \Omega_n, \quad (8)$$

כאשר

$$\tilde{c}_n = \sum_{\eta \in \Omega_n} \prod_{j=1}^n \frac{a_j^{k_j}}{k_j!}. \quad (9)$$

עתה נראה כי ההתפלגות (8) מתאימה למערכת עם חלקיקים

ממוספרים. תהי $\eta = (k_1, \dots, k_n) \in \Omega_n$ חלוקה נתונה של n חלקיקים ממוספרים בין מבנים אי-פריקים, כך שלכל אחד מ- k_j המבנים האי-פריקים מגודל j "נכנסים" j חלקיקים. זה אומר שאת החלוקה הנ"ל נתן לבצע במספר אופנים

$$\frac{n!}{(1!)^{k_1} k_1! (2!)^{k_2} k_2! \dots (n!)^{k_n} k_n!}$$

המתקבל ע"י נוסחה מולטינומית. משום שישנם m_j סוגים של מבנים אי-פריק בגודל j , לכל אחד מהפילוגים הנ"ל מתאימות

$$m_1^{k_1} \dots m_n^{k_n}$$

גירסאות שונות. בסיכומו של דבר יהיו ס"הכ

$$n! \prod_{j=1}^n \left(\frac{m_j}{j!} \right)^{k_j} \frac{1}{k_j!}$$

מבנים π_n בעלי ספקטרום η הנ"ל. כתוצאה מכך, מספרם הכולל של המבנים מגודל n הוא:

$$p_n = n! \sum_{\eta \in \Omega_n} \prod_{j=1}^n \left(\frac{m_j}{j!} \right)^{k_j} \frac{1}{k_j!}$$

עתה נשאר לסמן

$$a_j = \frac{m_j}{j!}, \quad j \geq 1$$

כדי לקבל ש-

$$p_n = n! \tilde{c}_n \quad (10)$$

ושעבור A_n -קבוצת המבנים π_n בעלי ספקטרום η , $\rho_n = P(A_n)$ שווה לאגף ימני של (8). נמצא עתה פונקציה יוצרת של $\{\tilde{c}_n\}$ הקשורה ל- $\{p_n\}$ בעזרת (10).

$$S^{(j)}(x) = \sum_{k \geq 0} e^{-a_j} \frac{a_j^k}{k!} x^{jk} = e^{-a_j} \sum_{k \geq 0} \frac{(a_j x^j)^k}{k!} =$$

$$e^{-a_j} \exp(a_j x^j), \quad j \geq 1$$

כאן $a_0^{(j)} = e^{-a_j}$ כך ש-

$$\tilde{S}^{(j)}(x) = \exp(a_j x^j), \quad j \geq 1,$$

-1

$$\tilde{g}(x) = \exp\left(\sum_{j \geq 1} a_j x^j\right). \quad (11)$$

דוגמאות של אסיפות.

א. תמורות. ראינו ש- $m_j = (j-1)!$ כך ש- $a_j = \frac{1}{j}$ -1

$$\tilde{g}(x) = \exp\left(\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} x^j\right) =$$

$$\exp\left(\log \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n.$$

לכן $\tilde{c}_n = 1, n \geq 0$ בהתאם לנוסחת קושי.

נחשב את $P(K_j^{(n)} = k_j)$ - ההסתברויות השוליות של הספקטרום.

נתחיל מ- $P(K_1^{(n)} = 0)$ - ההסתברות שתמורה אקראית לא מכילה אף נקודת שבת. נגדיר את המאורע

$$E_i^{(n)} = \{\pi_n \in S_n : \pi_n(i) = i\}.$$

אזי

$$P(K_1^{(n)} = 0) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i^{(n)}\right). \quad (12)$$

לפי עקרון הכלה-הדחה

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i^{(n)}\right) = \sum_{i=1}^n P(E_i^{(n)}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(E_{i_1}^{(n)} \cap E_{i_2}^{(n)}) + \dots$$

$$(-1)^{l+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n} P(E_{i_1}^{(n)} \dots \cap E_{i_l}^{(n)}) + \dots$$

$$(-1)^{n+1} P(E_1^{(n)} \cap \dots \cap E_n^{(n)}).$$

מזה נובע

$$P(K_1^{(n)} = 0) = 1 - \left(n \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n(n-1)(n-2)!}{2} \frac{1}{n!} + \dots\right)$$

$$(-1)^{l+1} \binom{n}{l} \frac{(n-l)!}{n!} + \dots (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} =$$

$$\sum_{l=2}^n \frac{(-1)^l}{l!} = \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l}{l!} \rightarrow e^{-1}, \quad n \rightarrow \infty.$$

באופן דומה,

$$P(K_j^{(n)} = k) = \frac{j^{-k}}{k!} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{j} \rfloor - k} (-1)^l \frac{j^{-l}}{l!} \rightarrow$$

$$\exp\left(-\frac{1}{j}\right) \frac{\left(\frac{1}{j}\right)^k}{k!} = Po\left(\frac{1}{j}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (13)$$

נדגיש שההתפלגות הגבולית זהה להתפלגות של מ.א. Z_j , $j \geq 1$.
 בעתיד נראה ש-(13) היא מקרה פרטי של תכונה כללית של
 התנהגות אסימפטוטית של מידות מולטיפליקטיביות
 (=ספקטרומים).

ב. נוסחת המדגם של Ewens(1972)
 (=Ewens sampling formula = ESF).
 הגדרה פורמלית של המודל:

$$a_j = \frac{\theta}{j}, \quad \theta > 0, \quad j \geq 1.$$

אזי

$$\tilde{c}_n = \left[\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\theta}{j} x^j\right) \right]_n = [\exp(-\theta \log(1-x))]_n =$$

$$[(1-x)^{-\theta}]_n = (-1)^n \frac{(-\theta)(-\theta-1)\dots(-\theta-n+1)}{n!} =$$

$$\frac{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)}{n!} := \frac{\theta^{(n)}}{n!}$$

: ואנו מגיעים להתפלגות Ewens

$$\mu_n(\eta) =$$

$$\binom{n!}{\theta^{(n)}} \prod_{j=1}^n \left(\frac{\theta}{j}\right)^{k_j} \left(\frac{1}{k_j!}\right) = \binom{n!}{\theta^{(n)}} \theta^{|\eta|} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\binom{j^{k_j}}{k_j!}},$$

$$\eta = (k_1, \dots, k_n) \in \Omega_n. \quad (14)$$

במקור התפלגות Ewens הופיעה כמודל הבא של גנטיקת אוכלוסין: לכל בן אדם ישנו מספר רב n של גנים המפוזרים בין תאי גוף. לכל גן יתכן כמה צורות (מוטציות), כך ש- n מתחלק לקבוצות הגנים בעלי אותו מספר של מוטציות: $n = \sum_{j=1}^n j k_j$ כאשר k_j זה מספרם הגנים בעלי j מוטציות כל אחד. במודל הנ"ל הפרמטר θ מבטא קצב המוטציה. הסענה הבאה מגלה דרך להדמית התפלגות Ewens. סענה תהי $\Pi_n^{(\theta)} \in S_n$ תמורה אקראית כך ש-

$$P(\Pi_n^{(\theta)} = \pi_n) = \frac{\theta^{|\pi_n|}}{\theta^{(n)}}, \quad \theta > 0, \quad \pi_n \in S_n, \quad (15)$$

כאשר $|\pi_n|$ - מספר מעגלים ב- π_n . אזי הספקטרום של $\Pi_n^{(\theta)}$ מפולג לפי נוסחת Ewens. הוכחה: נסמן $\mathcal{K}^{(n,\theta)}$ ספקטרום של $\Pi_n^{(\theta)}$ וב- $A_n(\eta)$ קבוצת כל התמורות $\pi_n \in S_n$ בעלות אותו הספקטרום $\eta \in \Omega_n$. נציין שלפי (15), כל $\pi_n \in A_n(\eta)$ הן בעלות אותו ערך $|\eta|$. לכן מתקיים

$$P(\mathcal{K}^{(n,\theta)} = \eta) = \sum_{\pi_n \in A(\eta)} P(\Pi_n^{(\theta)} = \pi_n) = N(\eta) \frac{\theta^{|\pi_n|}}{\theta^{(n)}},$$

כאשר $N(\eta) = |A_n(\eta)|$. לכן, לפי משפט קושי, מ.ש.ל. מסקנה ספקטרומים של שני מבנים אקראיים: תמורה אקראית $\Pi_n^{(\theta)}$ ואסיפה אקראית עם $m_j = \theta(j-1)!$ מפולגים באופן זהה.

מסעדה סינית כמודל של התפלגות Ewens

במסעדה סינית אינסוף שולחנות עגולים. האורח הראשון מתישב על-יד אחד מהשולחנות, האורח השני תופס שולחן חדש עם ההסתברות $\frac{\theta}{\theta+1}$ או מתיישב מימינו של הראשון בהסתברות $\frac{1}{\theta+1}$. האורח מספר $k \geq 2$ תופס שולחן חדש בהסתברות $\frac{\theta}{\theta+k-1}$ ובהסתברות $\frac{1}{\theta+k-1}$ מתיישב מימינו של כל אחד מ- $k-1$ האורחים הקודמים. אחרי בואו של אורח מספר n נוצרת הצגה מעגלית של תמורה אקראית של n כאשר האורחים היושבים על-יד אותו שולחן נחשבים שייכים לאותו מעגל ושולחנות (=מעגלים) מסודרים לפי מספר האורח אשר תופס אותו ראשון. אזי

$$P(\pi_n) = \frac{\theta^{|\pi_n|-1}}{(\theta+1) \dots (\theta+n-1)} = \frac{\theta^{|\pi_n|}}{\theta^{(n)}}.$$

זה אומר שנוצרת התמורה האקראית $\Pi_n^{(\theta)}$. תרגיל: מהי ההסתברות ש-6 אורחים יתיישבו באופן הבא:

$$\pi_6 = (1, 6)(2, 4, 5)(3).$$

פתרון: ההסתברות המבוקשת שווה ל-

$$P(\pi_6) = \left(\frac{1}{\theta+5}\right) \left(\frac{\theta}{\theta+1}\right) \left(\frac{1}{\theta+3}\right) \left(\frac{1}{\theta+4}\right) \left(\frac{\theta}{\theta+2}\right) = \frac{\theta^3}{\theta^{(6)}}$$

הערות:

א. במודל המסעדה הסינית התיישבות האורח מספר k על-יד שולחן חדש מבטאת את המו-טציה של הגן בדור ה- k .

ב. ESF התקבלה על בסיס של שתי ההנחות הבאות הנקראות חוקי התורשה הגנטית:
 (i) ההסתברות המוטציה בדור ה- k לא תלויה בהתפלגות הגנים ב- $(k-1)$ הדורות הקודמים;
 (ii) ההסתברות שסוג הגן בדור ה- k שייך לסוג j שהופיע k_j פעמים בדורות אשר קדמו ל- k ,
 תלויה ב- j ו- k_j בלבד.

תרגיל נסביר קיום חוקי התורשה הנ"ל ע"י הדוגמה. יהי $n = 9$ ותהי תמונת המצב ב- n דורות הקודמים (= פיזור ה- n האורחים בין השולחנות במסעדה סינית) כדלקמן:

2, 3, 8	1
5, 7, 9	4
	6

לישיבה כזאת מתאים ספקטרום $\eta = (3, 0, 2, 0, \dots, 0) \in \Omega_9$ אשר מגדיר חלוקת הגנים ב-9 הדורות שנצפו, כלומר גנים בעלי מוטציה אחת (=גנים מסוג 1) נצפו 3 פעמים וגנים בעלי שלוש מוטציות (=גנים מסוג 3) נצפו פעמיים. מהי ההסתברות שגן בדור 10 יהי מסוג 3? תשובה: ההסתברות המבוקשת שווה להסתברות שהאורח מספר 10 יתיישב על-יד אחד משני שולחנות עם 3 אורחים כל אחד. לכן היא שווה ל-

$$\frac{3k_3}{\theta + n} = \frac{6}{\theta + 9},$$

בחתום לחוק (ii).

נביא כמו כן פרוש ה- ESF מתחום של התנהגות החיות.

תחרות על שטח מחיה.

מינים (=קבוצות) שונות E_1, E_2, \dots של חיות מתחרים על שטח מסויים, כך שבזמנים $1, 2, \dots$ השטח נכבש כל פעם ע"י חיה אחת השייכת לאחד מה-מינים הנ"ל. חלוקת המינים בין n החיות אשר כבשו את השטח נקבעת ע"י הוקטור $\eta = (k_1, \dots, k_n) \in \Omega_n$ כאשר k_j הוא מספר המינים בין E_1, E_2, \dots אשר כבשו את השטח j פעמים כלומר יש להם j (מתוך n) נציגים בשטח. טענה אם ההסתברות שבזמן n השטח נכבש ע"י חיה ממין חדש, שווה ל-

$$\frac{\theta}{\theta + n - 1}, \theta > 0$$

, אזי התנאים (i) ו-(ii) של חוק ירושה שקולים.

הוכחה: נניח שעד וכולל זמן n בשטח נצפו n_1 חיות ממין E_1, \dots, n_k חיות ממין E_k , כך ש- $n_1 + \dots + n_k = n$. נסמן ב- $p(n_i, n)$ את ההסתברות שבזמן $n+1$ השטח יכבש ע"י חיה ממין $E_i, 1 \leq i \leq k$. נובע מכך ש-

$$\sum_{i=1}^k p(n_i, n) + \frac{\theta}{\theta + n} = 1. \quad (16)$$

עבור $k = n$ ו- $n_1 = \dots = n_n = 1$ נקבל מ-(16),

$$p(1, n) = \frac{1}{\theta + n}.$$

משום שב-(16) לפחות אחד מ- $n_i > 1$, נניח למשל ש- $n_1 > 1$ וניקח ב-(16), $n_1 - 1$ במקום $n_1, n_{k+1} = 1$ ויתר ה- n_i ללא שינוי:

$$p(n_1 - 1, n) + p(n_2, n) + \dots + p(n_k, n) +$$

$$p(1, n) + \frac{\theta}{\theta + n} = 1. \quad (17)$$

נפחית (17) מ-(16):

$$p(n_1, n) - p(n_1 - 1, n) = p(1, n) = p(n_1, n) = \frac{1}{\theta + n}.$$

לכן

$$p(n_1, n) = \frac{n_1}{\theta + n},$$

עבור כל $n, n_1 \leq n$

הוכחה של הטענה ההפוכה מיידית. מ.ש.ל.

מסקנה:

ו.א. $\mathcal{K}^{(n, \theta)}$ המגדיר את החלוקה אקראית בין המינים, מפולג לפי ההתפלגות ESF . מספר הקבוצות ב- $\mathcal{K}^{(n, \theta)}$

עבור ספקטרום $\mathcal{K}^{(n, \theta)}$ של מבנה אקראי פריק Π_n כלשהו נגדיר את המ.א. $|K_j^{(n)}| = \sum_{j=1}^n K_j^{(n)}$ שהוא מספר כולל המינים אי-פריקים (=קבוצות) ב- Π_n . במקרה התמורות זה מספר מעגלים ובמקרה של ESF זה מספר סוגי הגנים השונים או מספר המינים השונים שנצפו בשטח מריבה עד וכולל זמן n .

למה: מספר התמורות מ- n בעלות k מעגלים

יהי

$$S_{n,k} := \{\pi_n \in S_n : |\pi_n| = k, \quad c_{n,k} := |S_{n,k}|, \quad k \leq n.$$

מתקיים:

$$(i.) \quad c(n, k) = (n - 1)c(n - 1, k) + c(n - 1, k - 1),$$

$$1 \leq k \leq n, \quad c(0, 0) = 1, \quad c(n, k) = 0, \quad n, k \leq 0,$$

$$(ii.) \quad \sum_{k=0}^n c(n, k)x^k = x(x + 1) \dots (x + n - 1) = x^{(n)}.$$

הוכחה (i.) יהי $n \geq k \geq 1$. לכל אחת מהתמורות $\pi_{n-1} \in S_{n-1,k}$ מתאימות $(n - 1)$ תמורות

$\pi'_n \in S_{n,k}$ המתקבלות מה- π_{n-1}

ע"י הוספת המספר n לימינו של אחד מהמספרים

$1, 2, \dots, n - 1$. נעיר ש- $\pi'_n(n) \neq n$.

כתוצאה מכך מתקבלות $(n - 1)c_{n-1,k}$

תמורות מסוג הנ"ל השייכות ל- $S_{n,k}$. מאידך לכל תמורה

$\pi_{n-1} \in S_{n-1,k-1}$ מתאימה תמורה אחת

$$\pi'_n \in S_{n,k} : \pi'_n(n) = n,$$

המתקבלת באופן הבא:

$$\pi'_n(i) = \begin{cases} \pi_n(i), & \text{אם } i \neq n \\ n, & \text{אם } i = n. \end{cases}$$

בגלל שבסיכומו של דבר ספרנו את כל התמורות ב- $S_{n,k}$, הוכחנו (i).
(ii) יהי $x^{(n)} = \sum_{k=0}^n b(n, k)x^k$ נודא שהמקדמים $b(n, k)$ מקיימים את התנאי (i).
מתקיים

$$x^{(n)} = (x + n - 1)x^{(n-1)} = \sum_{k=1}^n b(n-1, k-1)x^k +$$

$$(n-1) \sum_{k=0}^{n-1} b(n-1, k)x^k$$

\Rightarrow (ii)

מ.ש.ל.

הערה: למספרים $s(n, k) := (-1)^{n-k} c(n, k)$, $k \leq n$ קוראים מספרי Stirling מסוג ראשון.
מתקיים:

$$\sum_{k=0}^n s_{n,k} x^k = x(x-1) \dots (x-n+1) := x_{(n)}.$$

טענה: מתקיים:

$$(i.) P(|\mathcal{K}^{(n,\theta)}| = k) = \frac{\theta^k}{\theta^{(n)}} c_{n,k}$$

-1

$$(ii.) E(|\mathcal{K}^{(n,\theta)}|) = \sum_{k=1}^n \frac{\theta}{\theta + k - 1}.$$

הוכחה:

$$(i) P(|\mathcal{K}^{(n,\theta)}| = k) = \sum_{\pi_n: |\pi_n|=k} P(\Pi_n^{(\theta)} = \pi_n) =$$

$$\frac{\theta^k}{\theta^{(n)}} c(n, k).$$

(ii) נסמן $Z := |\mathcal{K}^{(n,\theta)}|$ ותהי

$$g_Z(x) = \sum_{k=0}^n P(Z = k)x^k = Ex^Z$$

פונקציה יוצרת הסתברויות של מ.א. Z . על סמך (i), מתקיים

$$Ex^Z = \sum_{k=0}^n x^k \frac{\theta^k}{\theta^{(n)}} c(n, k) = \frac{1}{\theta^{(n)}} \sum_{k=0}^n (x\theta)^k c(n, k) =$$

$$\frac{(x\theta)^{(n)}}{\theta^{(n)}} = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\theta}{\theta+k-1} + \frac{x\theta}{\theta+k-1}\right) = \prod_{k=1}^n (xp_k + q_k), \quad (18)$$

כאשר $p_k = \frac{\theta}{\theta+k-1}$ ו- $q_k = 1 - p_k$. משום שפונקציה $xp_k + q_k$ מזדהה עם פונקציה יוצרת הסתברויות של מ.א. $Be(p_k)$, נובע מ-(18) שמ.א. Z מפולג כסכום של n מ.א. $Be(p_k)$, $k = 1, \dots, n$. חלק (i) של הטענה מאפשר לקבל את האסימפטוטיקה מספר הקבוצות ב- ESF . ידוע (Moser, Wyman, 1958) שעבור $k = o(\log n)$ מתקיים:

$$c(n, k) \sim (n-1)! \frac{(\gamma + \log n)^{k-1}}{(k-1)!}, \quad n \rightarrow \infty,$$

כאשר γ קבוע ידועה. לכן,

$$P(|\mathcal{K}^{(n, \theta)}| = k) \sim \frac{\theta^k}{\theta^{(n)}} (n-1)! \frac{(\gamma + \log n)^{k-1}}{(k-1)!},$$

$$k = o(\log n), \quad n \rightarrow \infty.$$

זו דוגמה של משפט גבול לוקלי.

ג. תהליכי מזוג ופירוק הפיכים (CFP)
מבוא: מידות אינוריאנטיות ומידות הפיכות

לפי הגדרת (CFP), בכל רגע של זמן $t \geq 0$, תהליך מזוג ופירוק (= CFP) מתואר ע"י חלוקה $\eta \in \Omega_n$, כלומר CFP מקבל ערכים ב- Ω_n לאורך כל הזמן t . כדי לקבוע השתנות הערכים של CFP בזמן, צריך להגדיר קצביהם של שני מעברים:

$$\eta \rightarrow \eta^{(i,j)}, \quad \eta \rightarrow \eta_{(i,j)}$$

עבור כל $\eta \in \Omega_n$ וכל $i, j : 2 \leq i+j \leq n$. קצבי המעברים (=מהירויות המעברים) האלו מוגדרים כדלקמן. נסמן ב- X_t מצבו התהליך בזמן t . אזי קצב המעבר הראשון, נאמר $\Psi(i, j; \eta)$, מוגדר כך:

$$\Psi(i, j; \eta) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(X_{t+\Delta t} = \eta^{(i,j)} | X_t = \eta)}{\Delta t}.$$

באופן דומה מגדירים את קצב המעבר השני, נאמר $\Phi(i, j; \eta)$:

$$\Phi(i, j; \eta) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(X_{t+\Delta t} = \eta_{(i,j)} | X_t = \eta)}{\Delta t}.$$

שתי ההגדרות הנ"ל תקפות עבור כל $t \geq 0$

וכל $i, j : 2 \leq i+j \leq n$

הפונקציות Ψ ו- Φ מגדירות את המיקרודינמיקה של התהליך. מתורה כללית של תהליכים סטוכסטיים ידוע ששתי הפונקציות הנ"ל מאפשרות, באופן עקרוני, לגלות גם מקרודינמיקה של התהליך שהיא התפלגות $\mu_t(\eta)$ של התהליך על מרחב Ω_n בכל זמן $t \geq 0$, כלומר

$$\mu_t(\eta) := P(X_t = \eta), \quad \eta \in \Omega_n, \quad t \geq 0.$$

כמו כן ידוע שבזמן $t = \infty$ התהליך מגיע למצב מאוזן (= התפלגות מאוזנת = מידה אינוריאנטית), על Ω_n :

$$\mu(\eta) := \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(\eta).$$

נסמן ב- Ω_n $\eta \neq \tilde{\eta}$, $c(\eta, \tilde{\eta})$ קצב המעבר $\tilde{\eta} \rightarrow \eta$. ברור ש- $c(\eta, \tilde{\eta}) = 0$ כאשר

$$\tilde{\eta} \in \left(\bigcup_{i,j} \eta^{(i,j)} \right) \left(\bigcup_{i,j} \tilde{\eta}^{(i,j)} \right), \quad \tilde{\eta} \neq \eta.$$

כמו כן ברור ש-

$$P(X_{t+\Delta t} = \eta | X_t = \eta) \rightarrow 1, \quad \Delta t \rightarrow 0.$$

משום כך נגדיר $c(\eta, \eta)$ -קצב היציאה מ- η , באופן הבא:

$$c(\eta, \eta) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - P(X_{t+\Delta t} = \eta | X_t = \eta)}{\Delta t}.$$

נציין שקצבי המעבר וקצב היציאה קשורים זה לזה כך ש-

$$c(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}) = \sum_{\eta \neq \tilde{\eta}} c(\eta, \tilde{\eta}), \quad \tilde{\eta} \in \Omega_n. \quad (19)$$

זה נובע מעובדה ש-

$$\sum_{\tilde{\eta} \neq \eta} P(X_{t+\Delta t} = \tilde{\eta} | X_t = \eta) =$$

$$1 - P(X_{t+\Delta t} = \tilde{\eta} | X_t = \tilde{\eta}).$$

ההתפלגות האינוריאנטית μ מתאפנת בכך שהיא מקיימת:

$$\sum_{\eta \neq \tilde{\eta}} c(\eta, \tilde{\eta}) \mu(\eta) = c(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}) \mu(\tilde{\eta}), \quad \tilde{\eta} \in \Omega_n. \quad (20)$$

ה- (20) נקראת משוואת איזון. פרוש משוואת איזון: האגף השמאלי של (20) שווה ל"זרם" הסתברותי הכולל הנכנס ל- $\tilde{\eta}$ מכל $\eta \in \Omega_n : \eta \neq \tilde{\eta}$. תנאי האיזון אומר שבמצב תמידי (=מאוזן) הזרם הזה צריך להיות שווה ל"זרם" הסתברותי שיוצא מ- $\tilde{\eta}$ (=האגף הימני של (20)). נניח עתה שמידה μ וקצבי $c(\eta, \tilde{\eta})$ מקיימים את התנאי

$$\mu(\eta) c(\eta, \tilde{\eta}) = \mu(\tilde{\eta}) c(\tilde{\eta}, \eta), \quad \eta, \tilde{\eta} \in \Omega_n \quad (21)$$

הנקרא תנאי האיזון המפורט. פרוש ה-(21) שעבור כל זוג של $\eta, \tilde{\eta} \in \Omega_n$, שני "זרמים" $\tilde{\eta} \rightarrow \eta$ ו- $\eta \rightarrow \tilde{\eta}$ הם שווים. המידה אשר מקיימת (21) נקראת הפיכה. נראה שכל מידה הפיכה היא אינוריאנטית, כלומר ש-(21) גורר (20). אמנם, על סמך (19), (21):

$$\sum_{\eta \neq \tilde{\eta}} c(\eta, \tilde{\eta}) \mu(\eta) = \sum_{\eta \neq \tilde{\eta}} c(\tilde{\eta}, \eta) \mu(\tilde{\eta}) = \mu(\tilde{\eta}) \sum_{\eta \neq \tilde{\eta}} c(\tilde{\eta}, \eta) = \mu(\tilde{\eta}) c(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}).$$

מ.ש.ל.

טבעי להניח שקצבי המעבר של CFP הם מהצורה הבאה:

$$\Psi(i, j; \eta) := \Psi(i, j; k_i, k_j) = k_i k_j \psi(i, j),$$

$$i \neq j, \quad 2 \leq i + j \leq n,$$

$$\Psi(i, i; \eta) := \Psi(i, i; k_i, k_i) = k_i(k_i - 1)\psi(i, i),$$

$$2 \leq 2i \leq n,$$

$$\Phi(i, j; \eta) := \Phi(i, j; k_{i+j}) = k_{i+j} \phi(i, j), \quad 2 \leq i + j \leq n.$$

כאן $\psi(i, j)$, $\phi(i, j)$ מפורשים בהתאמה כקצבי מזוג של שתי קבוצות בודדות וקצבי פירוק של קבוצה בודדת לשתי קבוצות, כלומר כקצבי מעבר "סגוליים". טענה: תהי μ מידה המתאימה לספקטרום של אסיפה כלשהי אשר נוצרה ע"י $Z_j \sim Po(a_j)$, $j \geq 1$. אזי μ הפיכה ביחס לקצבי מעבר סגוליים המקיימים:

$$q(i, j) := \frac{\psi(i, j)}{\phi(i, j)} = \frac{a_{i+j}}{a_i a_j}, \quad 2 \leq i + j \leq n.$$

הוכחה: נוודא קיום תנאי האיזון המפורט. לפי (8) מתקיים:

$$\mu(\eta) = (\tilde{c}_n)^{-1} \prod_{j=1}^n \frac{a_j^{k_j}}{k_j!}, \quad \eta \in \Omega_n.$$

נובע מכך שעבור $i \neq j : i, j \geq 1$ מתקיים:

$$\mu(\eta^{(i,j)}) = \mu(\eta) \left(\frac{k_j k_i}{a_j a_i} \right) \left(\frac{a_{i+j}}{k_{i+j} + 1} \right).$$

זאת ניתן לרשום כ

$$(k_{i+j} + 1) a_i a_j \mu(\eta^{(i,j)}) = k_j k_i a_{i+j} \mu(\eta).$$

זהו תנאי האיזון המפורט ביחס לקיצבי מעבר

$$c(\eta^{(i,j)}, \eta) = \Phi(i, j; \eta^{(i,j)}) = (k_{i+j} + 1)a_i a_j l(i, j)$$

-1

$$c(\eta, \eta^{(i,j)}) = \Psi(i, j; \eta) = k_j k_i a_{i+j} l(i, j)$$

כאשר $l(i, j) > 0$ פונקציה כלשהי.

באופן דומה מוכיחים את הטענה בשני המיקרים הנותרים. הערה: בהקשר ל- CFP , הפרמ-טרים a_j יכולים לקבל ערכים אי-שליליים כלשהם, כלומר לאו דווקא ערכים מצורה

$$a_j = \frac{m_j}{j!}, \quad j \geq 1$$

ד. חלוקות של קבוצה סופית

נסמן ב- $[n] = \{a_1, \dots, a_n\}$ קבוצה סופית של n

איברים a_1, \dots, a_n , כאשר $[0] = \emptyset$. בלי הגבלת ההכללה אפשר להניח ש- $[n] = \{1, \dots, n\}$. חלוקה $\pi_n = (C_1, \dots, C_l)$ של $[n]$ היא קבוצה של תת קבוצות $C_i \subseteq [n]$, $i = 1, \dots, l$ כך ש-

$$C_i \neq \emptyset, \quad j = 1, \dots, l \bullet$$

$$C_j \cap C_i = \emptyset, \quad j \neq i \bullet$$

$$C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_l = [n] \bullet$$

ל- C_i קוראים בלוקים ומסמנים ב- $l = |\pi_n|$ מספר בלוקים ב- π_n . כאן בלוקים הם מבנים אי-פריקים ו- $|C_i|$ זה גודל הבלוק C_i , כך שלכל מבנה פריק $\pi_n = (C_1, \dots, C_l)$

מתאימה החלוקה $\eta = (k_1, \dots, k_n) \in \Omega_n$ (ספקטרום) כאשר k_j הוא מספר הבלוקים ב- π_n שגודלם j . נציין שאין חשיבות לסדר רשימת הבלוקים. הוסכם למספר אותם לפי מספר מינימלי (מתוך $1, 2, \dots, n$) שהבלוקים מכילים.

לפי ניסוח הבעיה, כל בלוק מתאפיין רק באיברים המרכיבים אותו. לכן $m_j = 1, j \geq 1$ כמו כן, מניסוח הבעיה ברור שהחלקיקים (=איברים) הם ממוספרים. ובכן, $Z_j \sim Po(\frac{1}{j!}), j \geq 1$ ובהתאם לכך,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x) &= \sum_{n \geq 0} \frac{p_n}{n!} x^n = \exp \left(\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j!} x^j \right) = \\ &= \exp(e^x - 1). \end{aligned} \quad (22)$$

למספר כולל של חלוקות הקבוצה $[n]$ קוראים מספר $Bell$ ומסמנים אותו $B(n)$. לכן $p_n = B(n)$ ועל סמך (22):

$$\sum_{n \geq 0} \frac{B(n)}{n!} x^n = \exp \left(\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j!} x^j \right) = \exp(e^x - 1).$$

נסמן $B(n, k)$ מספר מבנים π_n המורכבים מ- k בלוקים. אזי

$$B(n) = \sum_{k=1}^n B(n, k).$$

$B(n, k)$ נקראים מספרי *Stirling* מסוג שני.
טענה: מתקיים:

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(k).$$

הוכחה: נתבונן בחלוקות הקבוצה $[n+1]$. בכל חלוקה הנ"ל המספר $n+1$ נמצא בבלוק שגודלו $k+1$, כאשר $0 \leq k \leq n$. את יתר k המספרים של אותו בלוק ניתן לבחור ב- $\binom{n}{k}$ אופנים. כתוצאה מכך ישאר לבצע חלוקה של קבוצת $n-k$ מספרים הנותרים. המספר החלוקות האלה שווה ל- $B(n-k)$. לכן,

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(n-k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(k).$$

מ.ש.ל.

רב קבוצות

המבנים האקראיים האלו נוצרים ע"י קשר מותנה עם מ.א. Z_j בלתי תלויים ומפולגים בינומית שלילית עם פרמטרים $m_j, \rho^j, j \geq 1$

$$Z_j \sim NBi(m_j; \rho^j), \quad j \geq 1.$$

נזכיר שהתפלגות בינומית שלילית מוגדרת ע"י:

$$a_j^{(k)} = P(Z_j = k) = \binom{m_j + k - 1}{k} \rho^{jk} (1 - \rho^j)^{m_j},$$

$$j \geq 1, \quad k \geq 0.$$

אם נגדיר מ.א. X_j כמספר ניסויי ברנולי עד וכולל m_j הצלחות, אזי $Z_j = X_j - m_j, j \geq 1$ לכן ניתן לפרש כמספר ניסויי ברנולי בלתי תלויים מעבר ל- m_j , עד וכולל m_j הצלחות, כאשר הסתברות ההצלחה בכל ניסוי שווה ל- ρ^j . לאור זאת, מניחים ש- $m_j \geq 1, j \geq 1$ ו- $0 < \rho < 1$. כאן

$$\tilde{a}_k^{(j)} = \binom{m_j + k - 1}{k} \rho^{jk}, \quad j \geq 1, \quad k \geq 0$$

ובהתאם ל-(6) מתקבל ביטוי הבא עבור הספקטרום:

$$P(\mathcal{K}^{(n)} = \eta) = (\tilde{c}_n)^{-1} \prod_{j=1}^n \binom{m_j + k_j - 1}{k_j} \rho^{jk_j} =$$

$$(\tilde{c}_n)^{-1} \rho^n \prod_{j=1}^n \binom{m_j + k_j - 1}{k_j}, \quad \eta \in \Omega_n,$$

כאשר

$$\tilde{c}_n = \rho^n \sum_{\eta \in \Omega_n} \prod_{j=1}^n \binom{m_j + k_j - 1}{k_j}.$$

לבסוף, אחרי הצמצום ב- ρ^n מקבלים:

$$P(\mathcal{K}^{(n)} = \eta) = \frac{\prod_{j=1}^n \binom{m_j + k_j - 1}{k_j}}{\sum_{\eta \in \Omega_n} \prod_{j=1}^n \binom{m_j + k_j - 1}{k_j}}. \quad (23)$$

משום שהתפלגות הספקטרום איננה תלויה ב- ρ , האחרון הוא פרמטר חופשי של המודל. עתה נבנה פונקציה יוצרת \tilde{g} עבור סידרה $\{\tilde{c}_n\}$. מתקיימים:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_j(x) &= \sum_{k \geq 0} \binom{m_j + k - 1}{k} \rho^{jk} x^{jk} = \\ &= \frac{1}{(1 - (\rho x)^j)^{m_j}}, \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

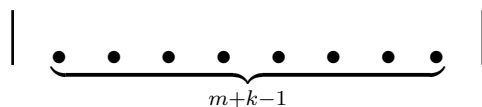
מכך נובע ש-

$$\tilde{g}(x) = \prod_{j \geq 1} \frac{1}{(1 - (\rho x)^j)^{m_j}}. \quad (24)$$

(המעבר האחרון נעשה בעזרת נוסחת בינום של *Newton*) הפונקציה שהתקבלה היא הכללה של פונקציה יוצרת של *Euler*. מטרתנו הבאה היא לגלות מבנה אקראי אשר יוצר את הספקטרום (23). למה יהי k מספר חלקיקים זהים ו- m מספר תאים, כך שכל תא יכול לאכלס מספר לא מוגבל של החלקיקים הנ"ל. אזי מספר פילוגי החלקיקים בין התאים שווה ל-

$$\binom{m + k - 1}{k}.$$

הוכחה: רעיון ההוכחה פותח בפיזיקה סטטיסטית. נקבע שתי מחיצות בקצוות ו- $m + k - 1$ מקומות בין המחיצות שמתוכם נבחר $m - 1$ מקומות למחיצות (בין התאים).



לכל בחירה הנ"ל של מחיצות מתאים פילוג של k חלקיקים בין m תאים. לדוגמה, אחד מהפילוגים עבור $k = 4$ ו- $m = 3$:



ולהפך, לכל פילוג של החלקיקים מתאימה בחירה של $m-1$ מחיצות בין $m+k-1$ מקומות. לכן מספר הפילוגים האפשריים הוא

$$\binom{m+k-1}{m-1} = \binom{m+k-1}{k}$$

משל.

עתה נתבונן במבנה פריק π_n המאכלס n חלקיקים זהים, כלומר לא ממוספרים. תהי $\eta = (k_1, \dots, k_n)$ חלוקת החלקיקים בין מיבנים אי-פריקים, כך ש- k_j זה מספר החלקיקים במבנה אי-פריק בגודל j . ראינו ש- n חלקיקים זהים ניתן לפלג בין m_j תאים (=מבנים אי-פריקים בגודל j)

ב-

$$\binom{m_j + k_j - 1}{k_j}$$

אופנים שונים. לכן ישנם סה"ל

$$N(\eta) = \prod_{j=1}^n \binom{m_j + k_j - 1}{k_j}$$

מבנים פריקים בעלי אותו ספקטרום (= חלוקה η). זה אומר שמספר p_n של כל המבנים הפריקים בגודל n המאכלסים בחלקיקים זהים, שווה ל-

$$p_n = \sum_{\eta \in \Omega_n} \prod_{j=1}^n \binom{m_j + k_j - 1}{k_j} = \rho^{-n} \tilde{c}_n.$$

נסמן כרגיל ב- Π_n מבנה אקראי המפולג באופן אחיד על p_n המבנים הנ"ל וב- $\mathcal{K}^{(n)}$ הספקטרום שנוצר. מתקיים:

$$P(\mathcal{K}^{(n)} = \eta) = \frac{N(\eta)}{p_n}.$$

הנוסחה שהתקבלה זהה ל-(23).

דוגמאות

א. חלוקות משוקללות. הנוסחה (24) מראה שחלוקות משוקללות של מספר n הם רב קבוצות, וזה כמובן בהתאם לעובדה שבניסוח המודל החלקיקים אשר מאכלסים מבנים אי-פריקים הם זהים.

נתבונן במיוחד במקרה $-m_j = 1, j \geq 1$, חלוקות לא משוקללות של n -מ- (23) מקבלים:

$$\mu(\eta) = P(\mathcal{K}^{(n)} = \eta) = \frac{1}{\sum_{\eta \in \Omega_n} 1} = \frac{1}{p_n}, \quad \eta \in \Omega_n.$$

זה מראה ש- μ היא התפלגות אחידה על Ω_n , או במילים אחרות, כל חלוקות של n הן שווי הסתברות.

נסמן עתה ב- $p_{n,k}$ מספר חלוקות של n המכילות k מחוברים בלבד. מאחר ו- $p_{n,k}$ תלוי בשני פרמטרים, פונקציה יוצרת הסיידרה $\{p_{n,k}\}$ היא פונקציה $g(x, z)$ של שני משתנים:

$$g(x, z) := \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 0} p_{n,k} z^k x^n.$$

טענה
מתקיים:

$$g(x, z) = \prod_{j \geq 1} \frac{1}{1 - zx^j}. \quad (25)$$

הוכחה: נמצא פיתוח לטור חזקות של האגף הימני של (25):

$$\prod_{j \geq 1} \frac{1}{1 - zx^j} = \prod_{j \geq 1} \left(\sum_{l \geq 0} (zx^j)^l \right).$$

לכן,

$$[x^n z^k] \prod_{j \geq 1} \frac{1}{1 - zx^j} = [x^n z^k] \prod_{j \geq 1} \left(\sum_{l \geq 0} z^l x^{jl} \right) = [x^n z^k] \left(1 + \dots + z^{k_1 + \dots + k_n} x^{1k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n} + \dots \right) = p_{n,k}.$$

מ.ש.ל.

ב. גז אידאלי: מודל מוכלל של *Bose – Einstein*

הנחת היסוד של מכניקה קוונטית קובעת שאנרגיה של כל חלקיק, למשל מולקולה של גז, יכולה לקבל ערכים (=להמצא ברמות) בודדים $1, 2, \dots$ בלבד. הרמות הנ"ל הן ערכים עצמי-ים של אופרטור מסויים, כך שכל ע"ע j הוא בעל כפילות m_j (=לרמה j של אנרגיה ישנם m_j סוגים). לפי כך האנרגיה הכוללת $E = n$ של מערכת מתחלקת בין החלקיקים, למשל מול-קולות גז, כך שלכל אחד מ- k_j חלקיקים ישנה אנרגיה ברמה j . מאחר שהחלקיקים נחשבים כזהים, המודל הוא רב קבוצה. המקרה $m_j = 1, j \geq 1$ נקרא מודל *Bose – Einstein* והמקרה $m_j = j^\alpha, \alpha > 0, j > 0$ נקרא מודל מוכלל של *Bose – Einstein*.

לבסוף נעיר שאם חלקיקים נחשבים ממוספרים אזי המודל הגז הוא אסיפה, בפרט במקרה $m_j = j^\alpha, j \geq 1$, האסיפה מכונה מודל של *Bolzman*.

ג. יערות עצים לא ממוספרים וללא שורשים

עץ הנו גרף קשיר ללא מעגלים שאחד מקודקודיו שלו יכול להבחר כשורש. יער על n קודקודים הוא איחוד של כמה עצים (=מבנים אי-פריקים) הנבנים על סה"כ n הקודקודים. הקודקודים יכולים להיות ממוספרים או לא.

המקרה שבנידון הוא רב קבוצה. אפשר להוכיח שכאן

$$m_j \sim c \rho^{-j} j^{-\frac{5}{2}}, \quad j \rightarrow \infty, \quad c = 0.5349, \quad \rho = 0.3383.$$

מבחרים

מבחרים מוגדרים כרבי קבוצות המורכבות ממבנים אי-פריקים

השונים זו מזו, כלומר למבנה "נבחר" לא יותר מ"נציג" אחד מכל אחד מ- m_j סוגים של מבנים אי-פריקים בגודל j . על סמך זה מספרם של המבחרים בעלי ספקטרום נתון $\eta = (k_1, \dots, k_n) \in \Omega_n$ שווה ל-

$$N(\eta) := \prod_{j=1}^n \binom{m_j}{k_j}$$

ואנו מקבלים את נוסחת ההתפלגות של ספקטרום המבחרים האקראיים:

$$P(\mathcal{K}^{(n)} = \eta) = \frac{\prod_{j=1}^n \binom{m_j}{k_j}}{p_n}, \quad (26)$$

כאשר

$$p_n = \sum_{\eta \in \Omega_n} N(\eta).$$

לבסוף נותר לוודא שההתפלגות הנ"ל נוצרת עי"ק קשר מותנה עם מ.א. Z_j המפולגים בינומית עם הפרמטרים m_j ו- $\frac{\rho^j}{1+\rho^j}$, כאשר $m_j \geq 1, \rho > 0$.

$$P(Z_j = k) = \binom{m_j}{k} \left(\frac{\rho^j}{1+\rho^j} \right)^k \left(\frac{1}{1+\rho^j} \right)^{m_j-k},$$

$$0 \leq k \leq m_j.$$

אמנם,

$$\tilde{a}_k^j = \binom{m_j}{k} \rho^{jk},$$

$$0 \leq k \leq m_j.$$

כתוצאה מכך מתקבלת נוסחה (26). נציין שההתפלגות (26) של הספקטרום לא תלויה ב- ρ , כך ש- ρ הוא פרמטר חופשי של המודל. בהמשך נקבל:

$$\tilde{S}^{(j)}(x) = \sum_{k \geq 0} \tilde{a}_k^j x^{jk} =$$

$$\sum_{k=0}^{m_j} \binom{m_j}{k} (\rho x)^{jk} = \left(1 + (\rho x)^{jk} \right)^{m_j}, \quad j \geq 1.$$

ו-

$$\tilde{g}(x) = \prod_{j \geq 1} \left(1 + (\rho x)^{jk} \right)^{m_j}.$$

דוגמא

חלוקות מספר n המורכבות ממחבורים שכולם שונים. נזכיר שעבור חלוקות של n , $m_j = n$, $j \geq 1$. לפיכך, במקרה שבנידון מבוחר הוא אוסף

$$\Omega_n^{(d)} := \{\eta = (k_1, \dots, k_n) \in \Omega_n : k_i \in \{0, 1\}\}.$$

למשל, עבור $n = 6$ החלוקות האפשריות הן: $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1, 0, 0)$.

ההצבה $m_j = 1, j \geq 1$ ב-(26) מראה שהספקטרום מפולג אחיד על $\Omega_n^{(d)}$. נציין שהמודל שבנידון משמש כאחד ממודלים של גז אידיאלי המכונה מודל *Fermi*.

סיכום: הקשר בין אוספים, רבי קבוצות ומבחרים

ראינו ששלושת המבנים האקראיים הנ"ל קשורים לשלוש הפונקציות היוצרות הבאות של הסדרות: $\{\tilde{c}_n\}$

• אוספים:

$$\tilde{g}(x) = \exp\left(\sum_{j \geq 1} a_j x^j\right), \quad a_j = \frac{m_j}{j!}, \quad j \geq 1$$

- פונקציה יוצרת מעריכית. כאן: $p_n = n! \tilde{c}_n, n \geq 1$.

• רבי קבוצות:

$$\tilde{g}(x) = \prod_{j \geq 1} (1 - (\rho x)^j)^{-m_j}.$$

כאן $p_n = \rho^{-n} \tilde{c}_n, n \geq 1$. נגדיר עתה פונקציה יוצרת h של הסידרה $\{p_n\}, n \geq 1$:

$$h(x) = \sum_{n \geq 0} p_n x^n.$$

אזי מתקיים:

$$h(x) = \sum_{n \geq 0} \tilde{c}_n (\rho^{-1} x)^n = \tilde{g}(\rho^{-1} x) = \prod_{j \geq 1} (1 - x^j)^{-m_j}.$$

זאת פונקציה יוצרת של *Euler*.

• מבחרים:

$$\tilde{g}(x) = \prod_{j \geq 1} (1 + (\rho x)^j)^{m_j}.$$

כאן שוב $p_n = \rho^{-n} \tilde{c}_n, n \geq 1$, כך ש-

$$h(x) = \sum_{n \geq 0} p_n x^n = \sum_{n \geq 0} \tilde{c}_n (\rho^{-1} x)^n =$$

$$\tilde{g}(\rho^{-1} x) = \prod_{j \geq 1} (1 + x^j)^{m_j}.$$

נראה עתה שגם את הפונקציות היוצרות \tilde{g} עבור רב קבוצות ומבחרים ניתן לרשום כפונקציות מעריכיות. נסמן

$$M(x) = \sum_{j \geq 1} m_j x^j.$$

אזי במקרה רבי קבוצות,

$$\tilde{g}(x) = \exp\left(-\sum_{j \geq 1} m_j \log(1 - x^j)\right) =$$

$$\exp\left(\sum_{j \geq 1} m_j \sum_{k \geq 1} \frac{x^{jk}}{k}\right) = \exp\sum_{k \geq 1} \left(\frac{M(x^k)}{k}\right).$$

באותו אופן, עבור מבחרים

$$\tilde{g}(x) = \exp\sum_{k \geq 1} \left(\frac{M(-x^k)}{k}\right).$$

בהמשך נקבל:

$$[x^l] \left(\sum_{k \geq 1} \frac{M(x^k)}{k}\right) = [x^l] \left(\sum_{j \geq 1} m_j \sum_{k \geq 1} \frac{x^{jk}}{k}\right) = \sum_{jk=l} \frac{m_j}{k} =: a_l \geq 0, \quad l \geq 1. \quad (27)$$

לפיכך פונקציה יוצרת עבור רבי קבוצות ניתן לרשום בצורה הבאה:

$$\tilde{g}(x) = \exp\left(\sum_{l \geq 1} a_l x^l\right).$$

פרוש הדבר שרב קבוצה עם פרמטרים $\{m_j, j \geq 1\}$ נתונים שקולה לאסיפה עם הפרמטרים $\{a_l, l \geq 1\}$ המתקבלים מ- $\{m_j, j \geq 1\}$ ע"י (27). אלא שהשקילות הנ"ל היא פורמלית בלבד, כי הנוסחה (27) מעבירה כל סידרה $\{m_j\}$ המשתנה באופן רגולרי (= מסודר) ביחס ל- j , לסידרה $\{a_j\}$ המתנהגת בצורת תווה ובוהו (= לא מסודרת).

למשל, תהי $m_j = 1, j \geq 1$. אזי $a_l = \sum_{jk=l} \frac{1}{k}$, מכאן מקבלים:

$$a_1 = 1, a_2 = 1 + 1/2 = 3/2, a_3 = 1 + 1/3 = 4/3,$$

$$a_4 = 1 + 1/2 + 1/4 = 7/4, a_5 = 6/5, \dots$$

באופן כללי, a_l שווה לסכום של כל המספרים $1/k$ כש- k הוא מחלק של l . לגבי הבחירות המצב שונה באופן מהותי. אמנם,

$$[x^l] \left(\sum_{k \geq 1} \frac{M(-x^k)}{k}\right) = [x^l] \left(\sum_{j \geq 1} m_j \sum_{k \geq 1} \frac{(-x)^{jk}}{k}\right),$$

כך שבין המקדמים $a_l, l \geq 1$ יהיו שליליים. לפיכך בחירות אינן שקולות לרבי קבוצות כלל. סודות שיטת Khitchine

ב-1950 Khitchine הציע שטה הסתברותית לפתרון בעיות אסימפטוטיות המתעוררות בפיזיקה סטטיסטית. השיטה מתבססת על שני העקרונות הבאים:

• בניית מודל עזר הסתברותי עם פרמטר חופשי, כדי לבטא את הגודל שבנידון דרך פונ-קצית ההסתברות של סכום משתנים אקראים בדידים ובלתי תלויים. ההתפלגות של מ.א. הנ"ל תלויה בפרמטר חופשי.

• הוכחת משפט גבול לוקלי בעזרת בחירה מתאימה של פרמטר חופשי.

נדגים ישום השיטה עבור חקר האסימפטוטיקה של פונקצית חלוקה מסולמת \tilde{c}_n . נתחיל ממידה מולטיפליקטיבית μ_n כלשהי הנוצרת ע"י מ.א. Z_j , כך ש-

$$P(Z_j = k) = a_k^{(j)}, \quad k \geq 0, \quad j \geq 1.$$

בנוסף לפונקציה יוצרת \tilde{g} נגדיר פונקציה יוצרת \tilde{g}_n הקטומה ב- n :

$$\tilde{g}_n(x) = \prod_{j=1}^n \tilde{S}^{(j)}(x) := \sum_{k \geq 0} \tilde{c}_{k,n} x^k, \quad n \geq 1.$$

נציין שעבור כל $x \in \mathcal{C} : |x| \leq 1$,

$$|\tilde{S}^{(j)}(x)| = \left| \sum_{k \geq 0} \tilde{a}_k^{(j)} x^{jk} \right| \leq \frac{1}{a_0^{(j)}}, \quad j \geq 1.$$

לכן הטור \tilde{g}_n גם כן מתכנס בתחום הנ"ל. קל להבחין ש- $(n+1)$ המקדמים הראשונים של \tilde{g} ו- \tilde{g}_n שווים זה לזה:
 $\tilde{c}_{k,n} = \tilde{c}_n, \quad 0 \leq k \leq n$
 נעבור עתה למשתנה x מרוכב:

$$x = e^{-\sigma + 2\pi i \alpha},$$

כאשר $\sigma \geq 0$ ו- $\alpha \in R$. לפיכך $|x| \leq 1$ ומתקיים:

$$\int_0^1 \tilde{g}_n(x) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_{k,n} e^{-k\sigma + 2\pi i \alpha(k-n)} \right) d\alpha = \tilde{c}_n e^{-n\sigma}. \quad (28)$$

במעבר האחרון השתמשנו באורטונורמליות מערכת פונקציות $e^{2\pi i \alpha m}, m \geq 0$

$$\int_0^1 e^{2\pi i \alpha m} d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{אם } m = 0 \\ 0, & \text{אם } m \neq 0, \quad m > 0 \end{cases} \quad (29)$$

עתה מ-(28) אנו מגיעים לזהות המבוקשת ביחס לפרמטר חופשי $\sigma \geq 0$:

$$\tilde{c}_n = e^{n\sigma} \int_0^1 \tilde{g}_n(e^{-\sigma + 2\pi i \alpha}) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha =$$

$$e^{n\sigma} \int_0^1 \prod_{j=1}^n \left(\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma+2\pi i\alpha}) \right) e^{-2\pi i\alpha n} d\alpha. \quad (30)$$

כדי להעניק פרוש הסתברותי ל-(30) אנו נרשום את הזהות כ-

$$\tilde{c}_n = e^{n\sigma} \tilde{g}_n(e^{-\sigma}) \int_0^1 \phi^{(n)}(\alpha) e^{-2\pi i\alpha n} d\alpha. \quad (31)$$

כאשר פונקציה $\phi^{(n)}$ מוגדרת ע"י:

$$\phi^{(n)}(\alpha) = \prod_{j=1}^n \frac{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma+2\pi i\alpha})}{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})}.$$

נסמן

$$p_{jk} = \frac{\tilde{a}_k^{(j)} e^{-\sigma jk}}{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})},$$

כדי להסיק ש-

$$\phi_j(\alpha) := \frac{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma+2\pi i\alpha})}{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})}, \quad j \geq 1$$

היא פונקציה אופיינית של מ.א. X_j המוגדר ע"י:

$$P(X_j = jk) = p_{jk}, \quad j \geq 1, \quad k \geq 0.$$

על סמך זה, $\phi^{(n)} = \prod_{j=1}^n \phi_j$ היא פונקציה אופיינית של סכום

$$V_n = X_1 + \dots + X_n \quad (31a)$$

של n מ.א. X_j בלתי תלויים. כעת נזכיר שעבור מ.א. Y בדיד המקבל ערכים שלמים בלבד ובעל פונקציה אופיינית ϕ_Y מתקיים:

$$\int_0^1 \phi_Y(\alpha) e^{-2\pi i\alpha n} d\alpha = P(Y = n).$$

זה נובע מ-(29) והגדרה של פונקציה אופיינית.

בסיכומו של דבר אנו מקבלים מ-(31) את הצגת *Khintchine* (=בצורת *Khintchine*). של פונקצית חלוקה מסולמת \tilde{c}_n :

$$\tilde{c}_n = e^{n\sigma} \tilde{g}_n(e^{-\sigma}) P(V_n = n), \quad n \geq 1. \quad (32)$$

כאן $\sigma \geq 0$ הינו פרמטר חופשי של המודל.

הערה: מהדיון הקודם ברור שההצגה (32) תקפה למעשה עבור כל σ כך שהטור \tilde{g} מתכנס. בהמשך נראה שעבור מבנים פריקים מסויימים (32) מתקיימת עבור $\sigma \in R$. בדרך כלל מטרת חקר התנהגות אסימפטוטית של איזושהו גודל p_n , כש- $n \rightarrow \infty$, הינה מציאת פונקציה $f(n)$ כך ש- $p_n \sim f(n)$, $n \rightarrow \infty$.

משפט הגבול לוקלי
התנהגות אסימפטוטית של ההסתברות

$$P(V_n = n)$$

ב-(32) עבור V_n ב-(31) נקבעת בעזרת תורת משפטי גבול לוקליים.

(i.) עיקרון *Khintchine* ו-*Fawler – Darwin* לבחירת פרמטר σ .

ראשית נציין ש- $P(V_n = n)$ תלויה ב- σ משום שב- σ תלויות ההתפלגויות של מ.א. $X_j, j \geq 1$. רצוי לבחור σ כך שההסתברות שבנידון תיהיה גדולה. אחת מהדרכים אשר יכולות (!) בהרבה מקרים להבטיח זאת, היא לבחור $\sigma = \sigma_n$ כך ש-

$$EV_n = n. \quad (33)$$

ראיון הבחירה הזאת מתבסס על עובדה שמסה הסתברותית של מ.א. מרוכזת בסביבה מסויימת של תוחלת שלו, בהתאם לאי-שוויון צבישב:

$$P(|X - EX| \geq A) \leq \frac{Var X}{A^2}, \quad A > 0.$$

מ- (33) מתקבלת משוואה הבאה ביחס ל- σ :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k \geq 0} \left(k j \frac{\tilde{a}_k^{(j)} e^{-\sigma k j}}{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})} \right) = n.$$

להלן צורת המשוואה (33) עבור שלושת המבנים הפריקים.

אוספים
ראינו ש-

$$\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma}) = \exp(a_j e^{-j\sigma}), \quad j \geq 1.$$

לכן,

$$p_{jk} = \frac{(a_j e^{-\sigma j})^k}{k!} \exp(-a_j e^{-\sigma j}), \quad k \geq 0, \quad j \geq 1.$$

מאחר ו-

$$p_{jk} := P(X_j = jk) = P\left(\frac{1}{j}X_j = k\right),$$

מ.א.

$$\frac{1}{j}X_j \sim Po(a_j e^{-\sigma j}), \quad j \geq 1.$$

כתוצאה מכך $EX_j = ja_j e^{-\sigma j}, \quad j \geq 1$ ולבסוף נקבל את הצורה הבאה של (33):

$$EV_n := M_1(\sigma) = \sum_{j=1}^n ja_j e^{-\sigma j} = n, \quad n \geq 1. \quad (*)$$

$$\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma}) = \frac{1}{(1 - \rho^j e^{-\sigma j})^{m_j}}, \quad j \geq 1.$$

-1

$$p_{jk} = (1 - (\rho e^{-\sigma})^j)^{m_j} \binom{m_j + k - 1}{k} (\rho e^{-\sigma})^{jk},$$

$$k \geq 0, \quad j \geq 1.$$

באגף ימין התפלגות בינומית שלילית עם פרמטרים m_j ו- $(\rho e^{-\sigma})^j$. לפיכך, כמו במקרה הקודם,

$$\frac{1}{j} EX_j = \frac{m_j (\rho e^{-\sigma})^j}{1 - (\rho e^{-\sigma})^j}, \quad j \geq 1$$

-1

$$EV_n := M_2(\sigma) = \sum_{j=1}^n \frac{j m_j (\rho e^{-\sigma})^j}{1 - (\rho e^{-\sigma})^j} = n, \quad n \geq 1. \quad (**)$$

תזכורת: יהי $Z = X - m$, כאשר מ.א. X הוא מספר ניסויי ברנולי בלתי תלויים עם הסתברות הצלחה p בכל ניסוי, עד וכולל m הצלחות. את המ.א. X ניתן להציג כסכום של m מ.א. גאומטריים בלתי תלויים, כל אחד עם פרמטר p . לכן $EZ = \frac{m}{q} - m$ מבחרים

$$\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma}) = \sum_{k=0}^{m_j} \binom{m_j}{k} (\rho e^{-\sigma})^{jk} = (1 + (\rho e^{-\sigma})^j)^{m_j},$$

$$j \geq 1.$$

$$p_{jk} = (1 + (\rho e^{-\sigma})^j)^{-m_j} \binom{m_j}{k} (\rho e^{-\sigma})^{jk} =$$

$$\binom{m_j}{k} \left(\frac{(\rho e^{-\sigma})^j}{1 + (\rho e^{-\sigma})^j} \right)^k \left(\frac{1}{1 + (\rho e^{-\sigma})^j} \right)^{m_j - k},$$

$$k \geq 0, \quad j \geq 1.$$

לכן

$$\frac{1}{j} X_j \sim Bi\left(m_j; \frac{(\rho e^{-\sigma})^j}{1 + (\rho e^{-\sigma})^j}\right), \quad j \geq 1$$

נובע מכך ש-

$$EX_j = j m_j \frac{(\rho e^{-\sigma})^j}{1 + (\rho e^{-\sigma})^j}, \quad j \geq 1$$

$$EV_n := M_3(\sigma) = \sum_{j=1}^n j m_j \frac{(\rho e^{-\sigma})^j}{1 + (\rho e^{-\sigma})^j} = n. \quad (***)$$

מסתבר שמשוואות $(*)$, $(**)$, $(***)$ בעלות התכונה החשובה מאוד הבאה. נסכים לסמן $b_j = a_j$ במקרה אוספים ו- $b_j = m_j$ בשני המקרים הנותרים.

הערה

מנוסחאות (23), (26) של התפלגויות הספקטרום רבי קבוצות ומבחרים בהתאמה ראינו שההתפלגויות הנ"ל לא תלויות בפרמטר ρ . לפיכך באנליזה האסימפטו-טית שנציג בהמשך נקבע $\rho = 1$.

למה לכל אחת משלושת המשוואות $(*)$, $(**)$, $(***)$ קיים פתרון σ_n אחד ויחיד משלה, עבור כל $n \geq 1$ נתון. יתר על כן, הפתרון הוא מהצורה

$$\sigma_n = \delta_n + \log y, \quad \delta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad y > 0, \quad (34)$$

אמ"ם הפרמטרים b_j מקיימים את שני התנאים הבאים עבור כל $\epsilon > 0$

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} (b_j y^{-j} e^{\epsilon j}) \geq 1. \quad (35)$$

ועבור כל n מספיק גדול

$$b_n \leq y^n e^{\epsilon n}. \quad (36)$$

הוכחה: כל שלושת הפונקציות M_i , $i = 1, 2, 3$ הן מונוטוניות יורדות ביחס ל- σ , כך שעבור כל n סופי מתקיים:

$$M_i(+\infty) = 0, \quad M_i(-\infty) = +\infty, \quad i = 1, 2, 3.$$

זה מבטיח קיום ויחידות הפתרון $\sigma = \sigma_n$ עבור כל n סופי נתון, בכל שלושת המקרים הנ"ל. כדי להוכיח את החלק השני של טענת הלמה, נתבונן בנפרד בכל אחת מהמשוואות $(*)$ – $(***)$. לשם הוכחה שהתנאי (35) מספיק ל-(34) נרשום

$$\sigma_n = \delta_n + \log y, \quad y > 0, \quad n \geq 1.$$

$(*)$:

$$n = \sum_{j=1}^n j a_j e^{-\sigma_n j} \geq n a_n e^{-\sigma_n n} \geq n y^n e^{-n \epsilon} e^{-\sigma_n n}. \Rightarrow$$

$$1 \geq y^n e^{-n(\epsilon + \delta_n)} \Rightarrow$$

עבור n מספיק גדול:

$$\epsilon + \delta_n \geq 0, \quad \epsilon > 0. \quad (37)$$

מאיך, מ-(36) נובע שעבור n_1, n מספיק גדולים ו- $\epsilon > 0$ כלשהו מתקיים:

$$n = const + \sum_{j=n_1}^n ja_j e^{-\sigma_n j} \leq const + \sum_{j=n_1}^{\infty} j e^{(\epsilon - \delta_n)j}. \Rightarrow$$

$$\epsilon - \delta_n \geq 0. \quad (38)$$

מ-(37) ו-(38) נובע ש- $n \rightarrow \infty, \delta_n \rightarrow 0$. ובכך הוכחנו שהתנאים (35), (36) מספיקים ל-(34).
עתה נוכיח את הטענה ההפוכה. נניח שמתקיים (34). אזי

$$n = \sum_{j=1}^n ja_j e^{-\sigma_n j} = \sum_{j=1}^n ja_j y^{-j} e^{-\delta_n j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} ja_j y^{-j} e^{\epsilon j},$$

עבור n מספיק גדול ו- $\epsilon > 0$ מספיק קטן. אם (35) לא מתקיים, כלומר

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} (a_j y^{-j} j e^{\epsilon_1 j}) < 1$$

, עבור $\epsilon_1 > 0$ מסויים, אזי

$$n \leq \sum_{j=1}^{\infty} j e^{-\epsilon_1 j} e^{\epsilon j} < \infty,$$

עבור כל $\epsilon < \epsilon_1$. סתירה. לבסוף, בהנחה שמתקיים (34),

$$n \geq n a_n y^{-n} e^{-\epsilon n},$$

עבור n מספיק גדול ו- $\epsilon > 0$ קטן. מ.ש.ל.

**

ראשית נזכיר שב- $\rho = 1$ אזי מ-(35),

$$n \geq n m_n y^{-n} e^{-n \delta_n} \geq n y^n e^{-\epsilon n} y^{-n} e^{-n \delta_n},$$

עבור n מספיק גדול ו- $\epsilon > 0$ כלשהו. זה מוכיח ש- $\epsilon + \delta_n > 0$. בדרך דומה לזאת עבור אוספים מוכיחים את יתר טענות הלמה.

כאן עבור $\rho = 1$ מתקיים:

$$n \geq n m_n \frac{e^{-n \sigma_n}}{1 + e^{-n \sigma_n}}.$$

לכן אם מתקיים (34), אזי עבור n מספיק גדול,

$$1 \geq m_n \frac{y^{-n} e^{-n \epsilon}}{1 + e^{-\sigma_n n}}.$$

נזכיר שעבור המבחרים הפונקציה \tilde{g} מוגדרת (= המכפלה אינסופית מתכנסת) בתנאי ש-

$$x : |\rho x| < 1 \Leftrightarrow \rho e^{-\sigma} < 1.$$

לכן עבור n מספיק גדול ו- $\epsilon > 0$ מספיק קטן יתקיים:

$$m_n \leq Ay^n e^{\epsilon n} = y^n e^{n(\epsilon + \frac{\log A}{n})} = y^n e^{n\epsilon_1},$$

כאשר $\epsilon_1 = \epsilon + \frac{\log A}{n} > 0$, מאחר ו- $\epsilon > 0$ שרירותי. זה מראה ש-(36) מתקיים. בדרך דומה ניתן להוכיח את יתר טענות הלמה. הערה: תאור המבנים הפריקים אשר מקיימים (34) תחילה נציין שהתנאי (34) שקול ל-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \log y, \quad y > 0$$

ושלפי הלמה התנאי האחרון שקול לשני התנאים (36), (35) ביחד. כעת נביא דוגמה של מחלקת המבנים הפריקים \mathcal{F}_l המקיימים את שני התנאים הנ"ל. להלן נסכים לרשום $a_j \asymp b_j$ אם קיימים כך ש-

$$D_1 \leq \frac{a_j}{b_j} \leq D_2, \quad j \geq 1.$$

$$\mathcal{F}_l := \{b_j : b_j \asymp y^j j^{l-1} \log^\beta j, \quad j \rightarrow \infty, \quad y > 0, \quad l, \beta \in \mathcal{R}\}.$$

(39)

חשוב לציין שמדרישה $m_j \geq 1, j \geq 1$ נובע שב-(39), $y \geq 1$ כש- $b_j = m_j$. להלן נתבונן בבעיות אסימפטוטיות עבור מחלקות \mathcal{F}_l בלבד. מסתבר שמבחינה אנליטית יש להבדיל בשלושת המקרים הבאים בהתאם לערך של l ב-(39):

• *Logarithmic case* $l = 0$

• *Convergent case* $l < 0$

• *Expansive case* $l > 0$

ציודוק פיזיקלי לבחירת σ_n . הפרוש של σ_n אשר נביא להלן צויין עוד ע"י *Khinchine* עבור מודלים פשוטים של מכניקה סטטיסטית. אנו נכליל את הפרוש למבנים פריקים כלשהם. נחזור להצגת *Khinchine* (32). נתבונן בפונקציה

$$\Phi(\sigma) := e^{n\sigma} \tilde{g}(e^{-\sigma}).$$

כמו כן נגדיר את הפונקציה

$$U(\sigma) := \log \Phi(\sigma) = n\sigma + \sum_{j=1}^n \log \tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma}).$$

נציין ש-

$$\left(\log \tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})\right)'_{\sigma} = -\frac{\sum_{k \geq 0} \left(\tilde{a}_k^{(j)} e^{-\sigma j k} j k\right)}{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})} = -EX_j.$$

לכן

כעת אנו רואים ש-

$$\left(U(\sigma_n)\right)'_{\sigma} = 0,$$

\Leftrightarrow

σ_n - נקודה קריטית של הפונקציה U . יחד עם זה,

$$\left(U(\sigma)\right)''_{\sigma} = -\sum_{j=1}^n \left(EX_j\right)'_{\sigma}.$$

נזכיר ש-

$$EX_j = -\frac{\left(\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})\right)'_{\sigma}}{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})}.$$

לשם קיצור הרישום נסמן:

$$Q = Q(\sigma) = \tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})$$

אזי,

$$\left(EX_j\right)'_{\sigma} = -\frac{Q''_{\sigma} Q - \left(Q'_{\sigma}\right)^2}{Q^2}.$$

כאן

$$Q'_{\sigma}(\sigma) = -\sum_{k \geq 0} \left(\tilde{a}_k^{(j)} j k e^{-\sigma j k}\right) < 0, \quad \sigma \geq 0.$$

ו-

$$Q''_{\sigma}(\sigma) = \sum_{k \geq 0} \left(\tilde{a}_k^{(j)} (j k)^2 e^{-\sigma j k}\right) > 0, \quad \sigma \geq 0.$$

מזה בעזרת האי-שוויון קושי-שוורץ אנו מפיקים ש-

$$\left(EX_j\right)'_{\sigma} < 0, \quad \sigma \geq 0. \Rightarrow$$

$$\left(U(\sigma)\right)''_{\sigma} > 0, \quad \sigma \geq 0. \Rightarrow$$

פונקציה U קעורה ב- \mathcal{R}^+ ו- σ_n נקודת מינימום שלה ב- \mathcal{R}^+ .

אם נתייחס למבנה פריק כמערכת טרמודינמית של n חלקיקים הנמצאת במצב מאוזן, אזי בהתאם לחוק השני של טרמודינמיקה, הפונקציה U מתפרשת כאנטרופיה של המערכת ו- σ כהופכי של הטמפרטורה המוחלטת של המערכת. המשמעות הגדולה של אנטרופיה היא בכך

שאנטרופיה מודדת רמת התוהו ובוהו (=אקראיות) שבמערכת. על- כן בחירה הנ"ל $\sigma = \sigma_n$ של הפרמטר חופשי יוצרת מערכת בעלת אנטרופיה מינימלית. (ii.) סמיאינברינטים של V_n .

חומר עזר
 יהי Y מ.א. בעל פונקציה אופיינית $\phi_Y(\alpha) = Ee^{2\pi i\alpha Y}$ וכך ש- r $E|Y^k| < \infty$, עבור m נתון. אזי מתקיים פיתוח לטור טיילור:

$$\log \phi_Y(\alpha) = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(2\pi i\alpha)^k}{k!} s_k + O(s_r \alpha^r), \quad \alpha \rightarrow 0,$$

כאשר המקדמים s_k הנקראים סמיאינווריאנטים מתבטאים דרך המומנטים EY^k , $k \leq r$ של המ.א. Y נביא הביטויים השלושת הסמיאינווריאנטים הראשונים:

$$s_1 = EY, \quad s_2 = \text{Var}Y, \quad s_3 = E(Y - EY)^3, \dots$$

למה: להלן ביטויים מפורשים עבור סמיאינווריאנטים s_k , $k \geq 1$ עבור שלושת הסוגים המבנים הפריקים: * אוספים.

$$\frac{1}{j} X_j \sim \text{Po}(a_j e^{-\sigma j}), \quad j \geq 1. \Rightarrow$$

$$\phi_j(\alpha) = \exp\left(-a_j e^{-\sigma j}\right) \sum_{k \geq 0} e^{2\pi i \alpha k j} \frac{(a_j e^{-\sigma j})^k}{k!} =$$

$$\exp\left(-a_j e^{-\sigma j}\right) \exp\left(a_j e^{-\sigma j} e^{2\pi i \alpha j}\right) =$$

$$\exp\left(a_j e^{-\sigma j} (e^{2\pi i \alpha j} - 1)\right) \Rightarrow$$

$$\phi^{(n)}(\alpha) = \exp\left(\sum_{j=1}^n a_j e^{-\sigma j} (e^{2\pi i \alpha j} - 1)\right) \Rightarrow$$

$$\log\left(\phi^{(n)}(\alpha)\right) = \sum_{j=1}^n a_j e^{-\sigma j} (e^{2\pi i \alpha j} - 1)$$

כעת קל למצוא את ה- r s_r , $r \geq 1$ מפתוח לטור טיילור של $\log \phi^{(n)}$:

$$\left(\log\left(\phi^{(n)}(\alpha)\right)\right)_{\alpha=0}^{(r)} = (2\pi i)^r s_r, \quad r \geq 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^n j^r a_j e^{-\sigma j} (2\pi i)^r \Rightarrow$$

$$s_r = \sum_{j=1}^n j^r a_j e^{-\sigma j}, \quad r \geq 1.$$

**

רבי קבוצות.

$$\frac{1}{j}X_j \sim NeBi(m_j; (\rho e^{-\sigma})^j).$$

נשתמש בעובדה ש- $X_j = X - m_j$ כאשר מ.א.

$$X = Y_1 + \dots + Y_{m_j}$$

הוא סכום של m_j מ.א. גאומטריים עם הפרמטר $(\rho e^{-\sigma})^j$ (הסתברות הכשלון) בלתי תלויים. לכן,

$$\phi_{Y_1}(\alpha) = \sum_{k \geq 1} e^{2\pi i \alpha k} (1 - (\rho e^{-\sigma})^j) (e^{-\sigma})^{j(k-1)} =$$

$$\left(\frac{1 - (\rho e^{-\sigma})^j}{(\rho e^{-\sigma})^j} \right) \left(\frac{e^{2\pi i \alpha (\rho e^{-\sigma})^j}}{1 - e^{2\pi i \alpha (\rho e^{-\sigma})^j}} \right) \Rightarrow$$

$$\phi_X(\alpha) = e^{2\pi i \alpha m_j} \left(\frac{1 - (\rho e^{-\sigma})^j}{1 - e^{2\pi i \alpha (\rho e^{-\sigma})^j}} \right)^{m_j} \Rightarrow$$

$$\phi_{X_j}(\alpha) = \left(\frac{1 - (\rho e^{-\sigma})^j}{1 - e^{2\pi i \alpha j (\rho e^{-\sigma})^j}} \right)^{m_j} \Rightarrow$$

$$\log \left(\phi^{(n)}(\alpha) \right) =$$

$$\sum_{j=1}^n m_j \left(\log(1 - (\rho e^{-\sigma})^j) - \log(1 - e^{2\pi i \alpha j (\rho e^{-\sigma})^j}) \right).$$

נשתמש בפיתוח לטור טיילור של $-\log(1 - x)$, $|x| < 1$:

$$-\log(1 - e^{2\pi i \alpha j (\rho e^{-\sigma})^j}) = \sum_{k \geq 1} \frac{e^{2\pi i \alpha j k (\rho e^{-\sigma})^j}}{k}$$

$$\left(-\log(1 - e^{2\pi i \alpha j (\rho e^{-\sigma})^j}) \right)_{\alpha=0}^{(r)} =$$

$$m_j \sum_{k \geq 1} \frac{(2\pi j k)^r (\rho e^{-\sigma})^{jk}}{k} = m_j j^r (2\pi i)^r \sum_{k \geq 1} k^{r-1} (\rho e^{-\sigma})^{jk}$$

$$\Rightarrow s_r = \sum_{j=1}^n m_j j^r \sum_{k \geq 1} k^{r-1} (\rho e^{-\sigma})^{jk}, \quad r \geq 1.$$

*** מבחרים.

הפעם נשתמש בנוסחה כללית שהתקבלה קודם:

$$\phi^{(n)}(\alpha) = \prod_{j=1}^n \frac{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma+2\pi i\alpha})}{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})}, \quad \alpha \in R.$$

במקרה שבנידון,

$$\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma}) = (1 + (\rho e^{-\sigma})^j)^{m_j}, \quad j \geq 1 \Rightarrow$$

$$\log \phi_{X_j}(\alpha) =$$

$$m_j \left(\log(1 + (\rho e^{-\sigma+2\pi i\alpha})^j) - \log(1 + (\rho e^{-\sigma})^j) \right)$$

$$\Rightarrow s_r = \sum_{j=1}^n m_j j^r \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} k^{r-1} (\rho e^{-\sigma})^{jk}, \quad r \geq 1.$$

הערה. מתקיים:

$$Q_r(\sigma) := j^{r-1} \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} k^{r-1} (\rho e^{-\sigma})^{jk} =$$

$$(-1)^{(r-1)} \left(\sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} (\rho e^{-\sigma})^{jk} \right)_\sigma^{(r-1)} =$$

$$(-1)^{r-1} \left(\frac{(\rho e^{-\sigma})^j}{1 + (\rho e^{-\sigma})^j} \right)^{(r-1)}, \quad r \geq 1. \Rightarrow$$

$$Q_r(\sigma) = -(-1)^{r-1} \left(\frac{1}{1 + (\rho e^{-\sigma})^j} \right)^{(r-1)} > 0, \quad r \geq 2.$$

(40)

מסקנה: הסמיאנווריאנטים של כל שלושת הסוגים המבנים הפריקים הם חיוביים.

(iii.) אסימפטוטיקה של s_r - σ_n . מקרה *Expansive*.

בהמשך נראה שהאסימפטוטיקה של מבנה אקראי נקבעת ע"י

התנהגות של s_r - σ_n , $r \geq 1$ ו- $s_r = s_r(\sigma_n)$, כש- $n \rightarrow \infty$ משום כך נהוג לכנות את האחרונים

פרמטרים בסיסיים של מבנה. נציין ש- $s_r = s_r(n, \sigma)$ ונזכיר ש- $\sigma_n = \delta_n + \log y$. למה

במקרה *Expansive* ($l > 0$) עם $\beta = 0$ ו- $y \geq 1$, עבור כל שלושת המבנים הפריקים כש-

$n \rightarrow \infty$ ו- $\sigma = \sigma_n$, מתקיים:

$$\delta_n \asymp n^{-1/(l+1)}, \quad s_r(n) \asymp n^{(r+l)/(l+1)}, \quad r \geq 2.$$

יתרה מזה, קיים $N \geq 1$ כך שעבור כל $n \geq N$, $\delta_{n+1} < \delta_n$ ו- $s_r(n) \leq s_r(n+1)$, $r \geq 2$.

הוכחה: א. המקרה *Expansive* ($l > 0$) מתאפיין בכך שעבורו $\sigma_n > 0$ ו- $n\delta_n \rightarrow \infty$ עבור

כל שלושת הסוגים של מבנים פריקים.

חומר עזר:נוסחת סכמה של *Euler*.
 תהי פונקציה $f: \mathcal{R}^+ \Rightarrow \mathcal{R}^+$ רציפה ומונוטונית החל מ- x_0 מסויים. אזי עבור $n > x_0$ וקבועים מסויים $A_i, B_i, i = 1, 2$,

$$A_1 + f(n) + \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{j=1}^n f(j) \leq$$

$$A_2 + f(x_0) + \int_1^n f(x)dx,$$

אם f יורדת ו-

$$A_1 + f(x_0) + \int_1^n f(x)dx \leq$$

$$\sum_{j=1}^n f(j) \leq A_2 + \int_1^n f(x)dx + f(n),$$

אם f עולה. אנו נשתמש במסקנה הבאה של הנוסחה: אם בנוסחת *Euler* האינטגרל שואף ל- ∞ כש- $n \rightarrow \infty$, אזי מתקיים:

$$\sum_{j=1}^n f(j) \sim \int_1^n f(x)dx, \quad n \rightarrow \infty.$$

נתחיל מרבי קבוצות. מ- **, הגדרת המחלקת $\mathcal{F}_l, l > 0$ והנחה ש- $\rho = 1$,

$$n = \sum_{j=1}^n \frac{j m_j e^{-j\sigma_n}}{1 - e^{-j\sigma_n}} \geq D_1 \sum_{j=1}^n j^l e^{-j\delta_n} \geq D_1 n^l e^{-n\delta_n}. \Rightarrow$$

$\delta_n > 0$, כש n מספיק גדול. קודם לכן הוכחנו ש- $\delta_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. על סמך זה,

$$n \geq D_1 \sum_{j=1}^n j^l e^{-j\delta_n} \geq D_1 e^{-n\delta_n} \sum_{j=1}^n j^l, \quad l > 0$$

ואנו משיגים ש- $n\delta_n \rightarrow \infty$, כש- $n \rightarrow \infty$. כאן השתמשנו בעובדה ש-

$$\sum_{j=1}^n j^l \sim \int_1^n x^l dx = O(n^{l+1}), \quad l \rightarrow \infty.$$

ב. בעזרת העובדות שב- "א" ונוסחת *Euler*,

$$n \leq D_2 \sum_{j=1}^n \frac{j^l e^{-j\delta_n}}{1 - y^{-j} e^{-j\delta_n}} \leq$$

$$\delta_n^{-l-1} D_2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j\delta_n)^l e^{-j\delta_n}}{1 - e^{-j\delta_n}} \delta_n = \delta_n^{-l-1} D_2 \int_0^{\infty} \frac{x^l e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx.$$

משום שהאינטגרל חסום, אנו מקבלים ש-
 $\delta_n \leq D_4 n^{-1/(l+1)}, n \geq 1$, קבוע. מאידך, $D_4 > 0$.

$$n \geq D_1 \sum_{j=1}^n j^l e^{-j\delta_n} \sim \delta_n^{-l-1} D_1 \int_0^\infty x^l e^{-x} dx.$$

זה נותן, $\delta_n \geq D_3 n^{-1/(l+1)}, n \geq 1$, כש- $D_3 > 0$ קבוע. לכן הוכחנו ש- $\delta_n \asymp n^{-1/(l+1)}$.
 גנמצא את האסימפטוטיקה של הסמיאינווריאנטים.
 לפי הנוסחה שהתקבלה עבור s_r ,

$$s_r \asymp \sum_{j=1}^n j^{r+l-1} \sum_{k=1}^\infty k^{r-1} e^{-\delta_n jk} y^{j-jk} =$$

$$\sum_{k=1}^\infty k^{r-1} \sum_{j=1}^n j^{r+l-1} e^{-\delta_n jk} y^{j-jk}.$$

נטפל בעזרת נוסחת Euleur בסכום פנימי:

$$\sum_{j=1}^n j^{r+l-1} e^{-\delta_n jk} y^{j-jk} \sim \int_1^n x^{r+l-1} e^{-\delta_n xk} y^{x(1-k)} dx$$

$$= \delta_n^{-r-l} k^{-l-r} \int_{k\delta_n}^{kn\delta_n} z^{r+l-1} y^{\frac{z}{k\delta_n}(1-k)} e^{-z} dz.$$

(הצבה $z = \delta_n xk$). בהנחה ש- $y \geq 1$ ועל סמך התנהגות אסימפטוטית של δ_n , האינטגרל קטן
 או שווה ל- $\Gamma(r+l)$ עבור כל $k \geq 1$, עם שיוויון כש- $k=1$. לכן

$$\sum_{j=1}^n j^{r+l-1} e^{-\delta_n jk} y^{j-jk} \asymp \delta_n^{-r-l} k^{-l-r} \Rightarrow$$

$$s_r \asymp \delta_n^{-r-l} \sum_{k=1}^\infty k^{-l-1},$$

כאשר הטור באגף ימין מתכנס. לכן $s_r \asymp \delta_n^{-r-l}$.
 גנשאר להוכיח ש- σ_n יורדת מונוטונית ביחס ל- n , החל מ- n מסוים. נניח ש- $\sigma_{n+1} \geq \sigma_n$ עבור
 n כלשהו. אזי

$$\frac{e^{-j\sigma_{n+1}}}{1 - e^{-j\sigma_{n+1}}} \leq \frac{e^{-j\sigma_n}}{1 - e^{-j\sigma_n}}, \quad j \geq 1,$$

כך שמ- (***) נובע ש-

$$n+1 = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{j m_j e^{-j\sigma_{n+1}}}{1 - e^{-j\sigma_{n+1}}} \leq$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{j m_j e^{-j\sigma_n}}{1 - e^{-j\sigma_n}} = n + \frac{(n+1) m_{n+1} y^{-n-1} e^{-(n+1)\delta_n}}{1 - y^{-n-1} e^{-(n+1)\delta_n}}.$$

בגלל האסימפטוטיקה של δ_n שהתקבלה קודם לכן, האיבר האחרון שואף ל-0 כש- $n \rightarrow \infty$, עבור כל $y \geq 1$. לכן $\sigma_{n+1} < \sigma_n$ עבור n מספיק גדול. זה אומר שאותו דבר מתקיים עבור δ_n . בנוגע לסמיאנוריאנטים, מתקיים,

$$s_r(n+1) \geq \sum_{j=1}^n m_j j^r \sum_{k \geq 1} k^{r-1} (\rho e^{-\sigma_{n+1}})^{jk} \geq$$

$$\sum_{j=1}^n m_j j^r \sum_{k \geq 1} k^{r-1} (\rho e^{-\sigma_n})^{jk} = s_r(n), \quad r \geq 1,$$

כאשר האי-שוויון האחרון נובע משום ש- σ_n יורדת מונוטונית ב- n . בדרך דומה מוכיחים טענות הלמה עבור יתר המבנים האקראיים.

(iv) ניסוח והוכחת משפט הגבול הלוקלי. להלן נסמן כפי שמקובל $B_n^2 := \text{Var} V_n$. משפט הגבול הלוקלי עבור V_n .

במקרה *Expansive* עם $\beta = 0$, עבור $\sigma = \sigma_n$ מתקיים

$$P(V_n = n) \sim (2\pi B_n^2)^{-1/2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

הוכחה: ניתן את ההוכחה עבור רבי קבוצות. א. נגדיר את הסיידרה

$$\alpha_0(n) := \delta_n^{(l+2)/2} \log n \asymp n^{-(l+2)/2(l+1)} \log n.$$

מתקיים:

$$P(V_n = n) = T = T(n) := \int_0^1 \phi^{(n)}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha =$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \phi^{(n)}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha, \quad n \geq 1.$$

כאן המעבר לקטע $[-1/2, 1/2]$ מסתמך על כך שהפונקציה $\phi^{(n)}$ מתזורית עם מחזור שווה ל-1. אמנם,

$$\phi^{(n)}(\alpha + 1) = E e^{2\pi i(\alpha+1)V_n} = E e^{2\pi i \alpha V_n},$$

כיון שמ.א. V_n מקבל ערכים שלמים בלבד. בהמשך נפרק את האינטגרל T לסכום של שני אינטגרלים

$$T_2 = T_2(n) \text{ ו- } T_1 = T_1(n)$$

$$T_1 = T_1(n) = \int_{-\alpha_0(n)}^{\alpha_0(n)} \phi^{(n)}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha,$$

$$T_2 = T_2(n) = \int_{-1/2}^{-\alpha_0(n)} \phi^{(n)}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha +$$

$$\int_{\alpha_0(n)}^{1/2} \phi^{(n)}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha.$$

לפי העיקרון שיטת האוכף, מטרתנו הבאה היא להראות שרוב התרומה לאינטגרל T , כש $n \rightarrow \infty$, באה מהאינטגרל T_1 , כלומר ש-

$$T_2 = o(T_1), \quad n \rightarrow \infty.$$

ב.הבחירה של הקטע האינטגרציה $[-\alpha_0, \alpha_0]$ (= הסביבה הקטנה כש- $n \rightarrow \infty$ של "0") מבטיחה קיום שני התנאים החשובים הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^r s_r = 0, \quad r \geq 3$$

-1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_0^2 B_n^2 = \infty, \quad (41)$$

עבור כל $\alpha \in [-\alpha_0(n), \alpha_0(n)]$. נודא ש-(41) אמנם מתקיים בעזרת למה על אסימפטוטיקת הפרמטרים הבסיסיים:

$$|\alpha^r s_r| \leq \alpha_0^r s_r \asymp \left(n^{-(l+2)/2(l+1)} \log n \right)^r n^{(r+l)/(l+1)} =$$

$$n^{\frac{l(2-r)}{2(l+1)}} \log^r n \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{אם } r \geq 3 \\ \infty, & \text{אם } r = 2. \end{cases}$$

בהמשך נראה שתנאים (41) הנקראים תנאי *Lyapunov* מספיקים לקיום המשפט הגבול הלוקלי. מפיתוח של $\log \phi^{(n)}$ לטור טילור, בחירת σ_n ותנאי (41) נובע שעבור כל $\alpha \in [-\alpha_0(n), \alpha_0(n)]$ מתקיים:

$$\log \phi^{(n)}(\alpha) = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(2\pi i \alpha)^k}{k!} s_k + O(s_r \alpha^r) =$$

$$2\pi i \alpha n - 2\pi^2 \alpha^2 B_n^2 + \epsilon_n, \quad \epsilon_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \Rightarrow$$

$$\phi^{(n)}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha n} = \exp \left(\log \phi^{(n)}(\alpha) - 2\pi i \alpha n \right) \sim$$

$$\exp \left(-2\pi^2 \alpha^2 B_n^2 \right), \quad \alpha \in [-\alpha_0(n), \alpha_0(n)]. \Rightarrow$$

$$T_1(n) \sim \int_{-\alpha_0(n)}^{\alpha_0(n)} \exp \left(-2\pi^2 \alpha^2 B_n^2 \right) d\alpha =$$

$$\left(2\pi B_n \right)^{-1} \int_{-2\pi \alpha_0(n) B_n}^{2\pi \alpha_0(n) B_n} \exp \left(-\frac{u^2}{2} \right) du \sim$$

$$\left(2\pi B_n\right)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \sim (2\pi B_n^2)^{-1/2}.$$

ג. עתה נמצא חסם עבור האינטגרל $T_2(n)$ כש- $n \rightarrow \infty$.
 נציין שבתחום האינטגרציה של T_2 הפיתוח הקודם של הפונקציה $\log \phi^{(n)}$ לא תקף מפני שבתחום הנ"ל α לא שואף
 ל-0 כש- $n \rightarrow \infty$ (עבור $\rho = 1$):

$$|\phi^{(n)}(\alpha)| = \prod_{j=1}^n \left| \frac{1 - e^{-j\sigma_n}}{1 - e^{2\pi i \alpha j} e^{-j\sigma_n}} \right|^{m_j} =$$

$$\exp\left(-\sum_{j=1}^n \frac{m_j}{2} \log \left| \frac{1 - e^{2\pi i \alpha j} e^{-j\sigma_n}}{1 - e^{-j\sigma_n}} \right|^2\right), \quad \alpha \in R.$$

מתקיים:

$$\left| \frac{1 - e^{2\pi i \alpha j} e^{-j\sigma_n}}{1 - e^{-j\sigma_n}} \right|^2 =$$

$$\frac{(1 - e^{-j\sigma_n} \cos 2\pi \alpha j)^2 + e^{-2j\sigma_n} \sin^2 2\pi \alpha j}{(1 - e^{-j\sigma_n})^2} =$$

$$1 + \frac{2e^{-j\sigma_n}(1 - \cos 2\pi \alpha j)}{(1 - e^{-j\sigma_n})^2} = 1 + \frac{4e^{-j\sigma_n} \sin^2(\pi \alpha j)}{(1 - e^{-j\sigma_n})^2}.$$

כתוצאה מכך נקבל:

$$|\phi^{(n)}(\alpha)| =$$

$$\exp\left(-\sum_{j=1}^n \frac{m_j}{2} \log \left(1 + \frac{4e^{-j\sigma_n} \sin^2(\pi \alpha j)}{(1 - e^{-j\sigma_n})^2}\right)\right), \quad \alpha \in R.$$

נעזר באי-שוויון:

$$\log(1+x) \geq \frac{x}{1+c}, \quad (43)$$

כש- $0 \leq x \leq c$ ו- $c > 0$ קבוע כלשהו.
 עבור כל $j \in [4\sigma_n^{-1}, n]$ נפעיל (43) עם

$$x = x_j(n) := \frac{4e^{-j\sigma_n} \sin^2(\pi \alpha j)}{(1 - e^{-j\sigma_n})^2} \leq \frac{4e^{-1/4}}{(1 - e^{-1/4})^2} := c.$$

אזי

$$|\phi^{(n)}(\alpha)| \leq \exp\left(-\sum_{(4\sigma_n)^{-1} \leq j \leq n} C_1 m_j e^{-j\sigma_n} \sin^2(\pi \alpha j)\right) \leq$$

$$\exp\left(-\sum_{(4\sigma_n)^{-1} \leq j \leq n} C_2 j^{l-1} e^{-j\delta_n} \sin^2(\pi\alpha j)\right), \alpha \in R,$$

(42)

כאשר השלב האחרון נובע משום ש- $y \geq 1$. מעתה נתבונן ב-(42) כש- $|\alpha| \leq 1/2$.
נתן להוכיח שעבור n מספיק גדול,

$$Q_n(\alpha) := \sum_{(4\sigma_n)^{-1} \leq j \leq n} C_2 j^{l-1} e^{-j\delta_n} \sin^2(\pi\alpha j) \geq \log^2 n,$$

$$\alpha \in [\alpha_0, 1/2]. \Rightarrow .$$

$$T_2(n) \leq \exp(-\log^2 n),$$

עבור n מספיק גדול.

ההשוואה עם האסימפטוטיקה של האינטגרל $T_1(n)$ מוכיחה ש- $T_2(n) = o(T_1(n))$. מ.ש.ל.
נביא עתה פרוש הסתברותי של המשפט. נסמן

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Var X}} \exp\left(-\frac{(x - EX)^2}{2Var X}\right), \quad x \in R.$$

צפיפות ההתפלגות נורמלית $N(EX, Var X)$. בפרט מתקיים:

$$f(EX) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Var X}}$$

עבור מ.א. V_n ,

$$EV_n = n, \quad Var V_n = B_n^2.$$

זה אומר שאת משפט הגבול הלוקלי שהוכחנו ניתן לרשום כ-

$$P(V_n = n) \sim f(n), \quad n \rightarrow \infty.$$

מסיבה זאת התוצאה שהתקבלה נקראת משפט הגבול לוקלי נורמלי.
חשוב לציין שכל אחד מ.א. $X_j, j = 1, 2, \dots, n$ תלויים ב- n כיון שהתפלגותם תלויה
בפרמטר $\sigma = \sigma_n$. לאור זה הסידרה הנ"ל של מ.א. נקראת מערך משולש

$$\{X_j = X_j(n), \quad j = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots\} :$$

$$\begin{array}{cccc} X_1(1) & & & \\ X_1(2) & X_2(2) & & \\ X_1(3) & X_2(3) & X_3(3) & \\ X_1(4) & X_2(4) & X_3(4) & X_4(4) \end{array}$$

(v) נוסחה אסימפטוטית עבור \tilde{c}_n .
 עתה את הצגת *Khintchine* (32) עבור מקרה *Expansive* נתן לרשום באופן הבא:

$$\tilde{c}_n \sim (2\pi B_n^2)^{-1/2} e^{n\sigma_n} \tilde{g}_n(e^{-\sigma_n}), \quad n \rightarrow \infty,$$

כאשר

$$\delta_n \asymp n^{-1/(l+1)}, \quad B_n^2 \asymp n^{(2+l)/(l+1)}.$$

נתבונן עתה באספים. עבורם, כש- $y = 1$,

$$\tilde{g}_n(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^n a_j x^j\right), \quad a_j = \frac{m_j}{j!} \asymp j^{l-1},$$

$$l > 0, \quad j \geq 1 \Rightarrow$$

בעזרת נוסחת סכמה של *Euler*,

$$\sum_{j=1}^n a_j e^{-j\sigma_n} \asymp \sum_{j=1}^n j^{l-1} e^{-j\delta_n} \sim \delta_n^{-l} \Gamma(l),$$

$$l > 0.$$

זה מוביל לנוסחה אסימפטוטית גסה עבור \tilde{c}_n :

$$\log \tilde{c}_n \asymp -1/2 \log(2\pi) - \log B_n + n\delta_n + \delta_n^{-l} \Gamma(l)$$

$$\sim (1 + \Gamma(l)) n^{l/(l+1)}, \quad l > 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

זה אומר ש- \tilde{c}_n גודל אקספוננציאלי, "בערך" כ-

$$\exp\left(n^{l/(l+1)}\right),$$

כש- $n \rightarrow \infty$.

בעית התקבצות (= *clustering*).

במבנים פריקים אקראיים "המסה" הכוללת n מחולקת בין רכיבים אי-פריקים (=קבוצות) שגודלם שונה כדי לתאר תמונה טיפוסית של חלוקת ה- n נגדיר עבור כל $\eta \in \Omega_n$ שני גדלים הבאים:

$$\bar{q}_n = \bar{q}_n(\eta) = \max\{1 \leq j \leq n : k_j > 0\} -$$

גודל הרכיב הגדול ביותר בחלוקה נתונה $\eta \in \Omega_n$ ו-

$$q_n = q_n(\eta) = \min\{1 \leq j \leq n : k_j > 0\} -$$

גודל הרכיב הקטן ביותר בחלוקה נתונה $\eta \in \Omega_n$. לדוגמה, עבור

$$\eta = (0, 0, 3, 3, 0, 1, 1, 0, \dots, 0) \in \Omega_{34},$$

מתקיים

$$q_n = 3, \quad \bar{q}_n = 7.$$

הגודלים הנ"ל מאפיינים את מידת ההתקבצות המסה (=חומר) בחלוקה η . נעיר ש- $\eta = (n, 0, \dots, 0)$ מתאימה להתפזרות מקסימלית של החומר, בעוד שב- $\eta = (0, 0, \dots, 0, 1)$ החומר מתקבץ לקבוצה אחת בלבד. בהנתן מבנה אקראי פריק, \bar{q}_n ו- q_n הופכים למ.א.אנו נחקור התפלגותם כש- $n \rightarrow \infty$. מתקיים:

$$P(\bar{q}_n \leq r) = \sum_{\eta: \bar{q}_n \leq r} P(\mathcal{K}^{(n)} = \eta) = (\tilde{c}_n)^{-1} \sum_{\eta: \bar{q}_n \leq r} \prod_{j=1}^n \tilde{a}_{k_j}^{(j)}, \quad \eta = (k_1, \dots, k_n) \in \Omega_n.$$

באותו אופן,

$$P(q_n \geq r) = (\tilde{c}_n)^{-1} \sum_{\eta: q_n \geq r} \prod_{j=1}^n \tilde{a}_{k_j}^{(j)}, \quad \eta = (k_1, \dots, k_n) \in \Omega_n.$$

להלן, עבור $1 \leq \bar{r}, r \leq n$ נתונים מראש נשתמש בסימנים:

$$\tilde{c}_n^{(\bar{r})} := \sum_{\eta: \bar{q}_n \leq \bar{r}} \prod_{j=1}^n \tilde{a}_{k_j}^{(j)} = \sum_{\eta: \bar{q}_n \leq \bar{r}} \prod_{j=1}^{\bar{r}} \tilde{a}_{k_j}^{(j)}$$

-1

$$\tilde{c}_n^{(r)} := \sum_{\eta: q_n \geq r} \prod_{j=r}^n \tilde{a}_{k_j}^{(j)}.$$

נציין שגבולות המכפלות אשר בתוך הסכומים מתקבלים מהעובדה ש- $\tilde{a}_0^{(j)} = 1$, $j \geq 1$. נתחיל מפיתוח הצגת *Khinchine* עבור ההסתברויות הנ"ל. לשם כך קודם כל נקבל את ההצגות עבור $\tilde{c}_n^{(\bar{r})}, \tilde{c}_n^{(r)}$. נגדיר פונקציות יוצרות של הסדרות הנ"ל:

$$\tilde{g}_n^{(\bar{r})}(x) = \prod_{j=1}^{\bar{r}} \tilde{S}^{(j)}(x) := \sum_{k \geq 0} \tilde{c}_k^{(\bar{r})} x^k, \quad n \geq 1$$

-1

$$\tilde{g}_n^{(r)}(x) = \prod_{j=r}^n \tilde{S}^{(j)}(x) := \sum_{k \geq 0} \tilde{c}_k^{(r)} x^k, \quad n \geq 1.$$

עתה נפעל בדומה לפיתוח של (32). יהי

$$x = e^{-\sigma + 2\pi i \alpha},$$

כאשר $\sigma \geq 0$ ו- $\alpha \in R$. לפיכך $|x| \leq 1$ ומתקיים:

$$\int_0^1 \tilde{g}_n^{(\bar{r})}(x) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k^{(\bar{r})} e^{-k\sigma + 2\pi i \alpha(k-n)} \right) d\alpha = \tilde{c}_n^{(\bar{r})} e^{-n\sigma}.$$

במעבר האחרון השתמשנו באורטונורמליות מערכת הפונקציות $\{e^{2\pi i \alpha m}, m \geq 0\}$, ראה (29). עתה אנו מגיעים לזהות המבוקשת ביחס לפרמטר חופשי $\sigma \geq 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_n^{(\bar{r})} &= e^{n\sigma} \int_0^1 \tilde{g}_n^{(\bar{r})}(x) (e^{-\sigma + 2\pi i \alpha}) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha = \\ &= e^{n\sigma} \int_0^1 \prod_{j=1}^{\bar{r}} \left(\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma + 2\pi i \alpha}) \right) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha. \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\tilde{c}_n^{(\bar{r})} = e^{n\sigma} \tilde{g}_n(e^{-\sigma}) \int_0^1 \phi^{(\bar{r})}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha,$$

כאשר הפונקציה $\phi^{(\bar{r})}$ מוגדרת ע"י:

$$\phi^{(\bar{r})}(\alpha) = \prod_{j=1}^{\bar{r}} \frac{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma + 2\pi i \alpha})}{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})}, \quad \alpha \in R.$$

נסמן

$$p_{jk} = \frac{\tilde{a}_k^{(j)} e^{-\sigma j k}}{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})},$$

כדי להסיק ש-

$$\phi_j(\alpha) := \frac{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma + 2\pi i \alpha})}{\tilde{S}^{(j)}(e^{-\sigma})}, \quad j \geq 1$$

היא פונקציה אופיינית של מ.א. X_j המוגדר ע"י:

$$P(X_j = jk) = p_{jk}, \quad j \geq 1, \quad k \geq 0.$$

על סמך זה, $\phi^{(\bar{r})} = \prod_{j=1}^{\bar{r}} \phi_j$ היא פונקציה אופיינית של סכום

$$V_n^{(\bar{r})} = X_1 + \dots + X_{\bar{r}}$$

של \bar{r} מ.א. X_j בלתי תלויים. יש לציין שכאן ולהלן האינדקס n בא משום ש- $\sigma = \sigma_n$. בסיכומו של דבר אנו מקבלים את הצגת *Khintchine* של $\tilde{c}_n^{(\bar{r})}$:

$$\tilde{c}_n^{(\bar{r})} = e^{n\sigma} \tilde{g}_n^{(\bar{r})}(e^{-\sigma}) P(V_n^{(\bar{r})} = n), \quad n \geq 1. \quad (44)$$

באותה דרך מתקבלת גם הצגת *Khintchine* של $\tilde{c}_n^{(r)}$:

$$\tilde{c}_n^{(r)} = e^{n\sigma} \tilde{g}_n^{(r)}(e^{-\sigma}) P(V_n^{(r)} = n), \quad n \geq 1. \quad (45)$$

את האנליזה האסימפטוטית של ההסתברויות שבנידון נבצע עבור אספים במקרה *Expansive*. עבור אספים את (44), (45) ניתן לרשום כ-

$$\tilde{c}_n^{(\bar{r})} = e^{n\sigma} \exp\left(\sum_{j=1}^{\bar{r}} a_j e^{-j\sigma}\right) P(V_n^{(\bar{r})} = n)$$

-1

$$\tilde{c}_n^{(r)} = e^{n\sigma} \exp\left(\sum_{j=r}^n a_j e^{-j\sigma}\right) P(V_n^{(r)} = n),$$

כאשר

$$\phi^{(\bar{r})}(\alpha) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\bar{r}} a_j e^{-\sigma j} (e^{2\pi i \alpha j} - 1)\right)$$

-1

$$\phi^{(r)}(\alpha) = \exp\left(\sum_{j=r}^n a_j e^{-\sigma j} (e^{2\pi i \alpha j} - 1)\right).$$

ראינו שהסמיאינוואריאנטים המ.א. V_n נתונים ע"י:

$$s_k = \sum_{j=1}^n j^k a_j e^{-\sigma j}, \quad k \geq 1.$$

לפיכך, הסמיאינוואריאנטים המ.א. $V_n^{(\bar{r})}$ ו- $V_n^{(r)}$ הם:

$$s_k^{(\bar{r})} = \sum_{j=1}^{\bar{r}} j^k a_j e^{-\sigma j}, \quad s_k^{(r)} = \sum_{j=r}^n j^k a_j e^{-\sigma j}.$$

את בחירת הפרמטר חופשי σ נעשה לפי העקרון הקודם:

$$E(V_n^{(\bar{r})}) = \sum_{j=1}^{(\bar{r})} j a_j e^{-\sigma j} = n \quad (46)$$

-1

$$E(V_n^{(r)}) = \sum_{j=r}^n j a_j e^{-\sigma j} = n, \quad n \geq 1 \quad (47).$$

קל להוכיח שלכל אחת ממשוואות הנ"ל קיים פיתרון והוא יחיד, $\sigma_n^{(\bar{r})}$ ו- $\sigma_n^{(r)}$ בהתאמה. את התוצאות הבאות ננסה עבור תת קבוצה הבאה של מחלקת \mathcal{F}_l המבנים האקראיים הפרי-קיים:

$$\mathcal{F}_l = \{a_j \sim j^{l-1}, \quad l > 0\}.$$

למה: יהיו $r = n^\beta - 1$ ו- $\bar{r} = n^{\bar{\beta}}$ כאשר $0 \leq \bar{\beta}, \beta \leq 1$.
 (i) אם $0 \leq \beta < (l+1)^{-1}$ ו- $(l+1)^{-1} < \bar{\beta} \leq 1$ אזי

$$\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} \sim \sigma_n^{(r)} \sim \left(\Gamma(l+1)\right)^{\frac{1}{l+1}} n^{-\frac{1}{l+1}}, \quad l > 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

(ii) אם $0 < \bar{\beta} < (l+1)^{-1}$ ו- $(l+1)^{-1} < \beta < 1$ אזי

$$\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} \sim -\frac{\bar{\gamma} \log n}{n^{\bar{\beta}}} (1 + \bar{\delta}_n), \quad l > 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

כש-

$$\bar{\gamma} = 1 - (l+1)\bar{\beta}, \quad \bar{\delta}_n = \frac{\log(\bar{\gamma} \log n)}{\bar{\gamma} \log n},$$

ו-

$$\sigma_n^{(r)} \sim \frac{\gamma \log n}{n^\beta} (1 - \delta_n), \quad l > 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

כש-

$$\gamma = (l+1)\beta - 1, \quad \delta_n = \frac{\log(\gamma \log n)}{\gamma \log n}.$$

(iii) אם $\beta = \bar{\beta} = (l+1)^{-1}$ אזי

$$\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} \sim \bar{A} n^{-\frac{1}{l+1}}, \quad l > 0, \quad n \rightarrow \infty$$

ו-

$$\sigma_n^{(r)} \sim A n^{-\frac{1}{l+1}}, \quad l > 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

כש- $\bar{A}, A > 0$ מוגדרים כפתרונות יחידים של המשוואות

$$\bar{A}^{l+1} = \int_0^{\bar{A}} t^l e^{-t} dt$$

ו-

$$A^{l+1} = \int_A^\infty t^l e^{-t} dt$$

בהתאמה.

הוכחה:

א. חומר רקע: פונקצית גמא.

הפונקציה Γ היא המצאתו של *Euler* משנת 1729 שמטרתה היתה להרחיב את הפונקציה $n!$ ממספרים טבעיים למספרים מרוכבים. הפונקציה Γ מוגדרת ע"י:

$$\Gamma(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k! k^x}{(x+1)_k},$$

$$x \in \mathcal{C}, \quad x \neq -n, \quad n \geq 0,$$

כאשר

$$(x)_k := x(x+1)\dots(x+k-1), \quad k \geq 1, \quad (x)_0 = 1.$$

הוכח שהגבול הנ"ל קיים בתחום $x \in \mathcal{C}, \quad x \neq -n, \quad n \geq 0$ קל לוודא שבתחום הנ"ל,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

אמנם,

$$\Gamma(x+1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!k^{x+1}}{(x+2)_k} =$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!k^x}{(x+1)_k} \frac{k(x+1)}{x+k} = (x+1)\Gamma(x).$$

מזה נובע ש- $\Gamma(n) = n!, \quad n \geq 1$. העובדה חשובה היא שבתחום $Re(x) > 0$ הפונקציה Γ ניתנת ע"י הצגה אינטגרלית:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad Re(x) > 0.$$

נציין ש- $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1}, \quad t \rightarrow 0$, כך שהאינטגרל קיים כש- $Re(x) > 0$ ומתבדר כש- $Re(x) \leq 0$. להצגה הנ"ל ישנה המשכה אנליטית לכל מישור \mathcal{C} למעט נקודות $\{-n, n \geq 0\}$ שהן קוטבים פשוטים של הפונקציה Γ .

בגלל יחידות הפתרון של כל אחת מהמשוואות הנ"ל, מספיק לוודא שכל אחת מהנו-סחאות אסימפטוטיות (i) – (iii) מקיימת את המשוואה המתאימה. כמו קודם, הכלי שלנו לאנליזה אסימפטוטית הוא נוסחת סכמה של *Euler*. ראשית נפעיל את הנוסחה עבור הפונקציה $f(x, \sigma) = x^l e^{-\sigma x}, \quad l > 0$ כדי לרשום את המשוואות (46) ו-(47) בצורה אסימפטוטית, כש- $n \rightarrow \infty$. אחרי הצבה $u\sigma = x$ מתקבל:

$$n \sim \left(|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}| \right)^{-(l+1)} \int_{|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|}^{r|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|} t^l \exp \left(-t \operatorname{sign}(\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}) \right) dt$$

-1

$$n \sim \left(|\sigma_n^{(r)}| \right)^{-(l+1)} \int_{r|\sigma_n^{(r)}|}^{n|\sigma_n^{(r)}|} t^l \exp \left(-t \operatorname{sgn}(\sigma_n^{(r)}) \right) dt.$$

(48)

בהמשך נסמן לשם קיצור ב- $\bar{I}(n), I(n)$ האינטגרלים שבנוסחאות הנ"ל (i.) מתקיים

$$|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}| \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$$

-1

$$|r\sigma_n^{(r)}| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \Rightarrow$$

$$\bar{I}(n), I(n) \rightarrow \Gamma(l+1), \quad l > 0,$$

כי

$$\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}, \sigma_n^{(r)} > 0. \Rightarrow$$

$$\left(|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|\right)^{-(l+1)} \bar{I}(n) \sim n$$

-1

$$\left(|\sigma_n^{(r)}|\right)^{-(l+1)} I(n) \sim n.$$

משל

(ii) כאן $\bar{\gamma}, \gamma > 0$ לכן

$$\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} < 0, \sigma_n^{(r)} > 0.$$

$\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} < 0$ נובעת מכך שבמקרה שבנידון "מספר המחברים שבסכום לא גדול מספיק, כך שכדי שהסכום יהיה שווה ל- n , כש- n גדול, דרוש שהאקספוננטה תיהי גדולה מ-1". מתקיים:

$$|\bar{r}\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}| = \bar{\gamma}(1 + \bar{\delta}_n) \log n \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$$

-1

$$|r\sigma_n^{(r)}| = \gamma(1 + \delta_n) \log n \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty. \Rightarrow$$

$$\bar{I}(n) \rightarrow \infty,$$

כי

$$\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} < 0.$$

כעת נמצא את האסימפטוטיקה של האינטגרל $\bar{I}(n)$. לשם כך נשתמש בכלל לופיטל. מתקיים:

$$\left(|\bar{r}\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|\right)'_n = \bar{\gamma} \left(\log n + \frac{\log(\bar{\gamma} \log n)}{\bar{\gamma}} \right)'_n =$$

$$\bar{\gamma} n^{-1} \left(1 + \frac{1}{\bar{\gamma} \log n} \right).$$

$$\left(\bar{I}(n)\right)'_n \sim \left(|\bar{r}\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|\right)^l e^{|\bar{r}\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|} \left(|\bar{r}\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|\right)'_n, \quad (48)$$

כאשר

$$e^{|\bar{r}\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|} = n^{\bar{\gamma}} (\bar{\gamma} \log n).$$

לכן את (48) נתן לרשום כ-

$$\left(\bar{I}(n)\right)'_n \sim (\bar{\gamma} \log n)^{l+1} (1 + \bar{\delta}_n)^l n^{\bar{\gamma}-1} \bar{\gamma} \left(1 + \frac{1}{\bar{\gamma} \log n} \right) \sim$$

$$(\bar{\gamma} \log n)^{l+1} n^{-(l+1)\bar{\beta}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

לפי כלל לופיטל, זה אומר ש-

$$\bar{I}(n) \sim (\bar{\gamma} \log n)^{l+1} n^{-(l+1)\bar{\beta}+1} = (\bar{\gamma} \log n)^{l+1} n^{\bar{\gamma}} \Rightarrow$$

$$\left(|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|\right)^{-(l+1)} \bar{I}(n) \sim n, \quad n \rightarrow \infty.$$

החוכחה עבור r דומה.

(iii) במקרה שבנידון, מתקיים:

$$\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}, \sigma_n^{(r)} > 0,$$

$$\bar{r} \bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} \rightarrow \bar{A}, \quad r \sigma_n^{(r)} \rightarrow A, \quad n \sigma_n^{(r)} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

לכן אחרי הצבתם של הפתרונות באגף ימני של (48) נקבל בהתאמה:

$$\left(|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|\right)^{-(l+1)} \bar{I}(n) \sim \bar{A}^{-(l+1)} n \int_0^{\bar{A}} t^l e^{-t} dt = n$$

-1

$$\left(|\sigma_n^{(r)}|\right)^{-(l+1)} I(n) \sim A^{-(l+1)} n \int_A^\infty t^l e^{-t} dt = n$$

בשני המקרים השלב האחרון נובע מהגדרות של \bar{A}, A . נשאר רק לודא ש- \bar{A}, A הם פתרונות חיוביים יחידים של המשוואת שבטענת הלמה. הפונקצי

$$F(\bar{A}) := \int_0^{\bar{A}} t^l e^{-t} dt \rightarrow \Gamma(l+1), \quad \bar{A} \rightarrow \infty, F(0) = 0.$$

מזה נובע שהגרפים של שתי הפונקציות $F(\bar{A})$ ו- $\bar{A}^{(l+1)}$ נפגשים בנקודה אחת בלבד. אותו נימוק תקף גם עבור A . מ.ש.ל.

מסקנה: אסימפטוטיקה הפרמטרים B_2 ו- s_3 .

יהיו $\sigma_n^{(r)}, \bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}$ נתונים לפי למה. אז כש- $n \rightarrow \infty$ ו- $h > 0$ קבוע (כלומר לא תלוי ב- n),

$$\bar{B}^2 \sim h \begin{cases} n \left(\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}\right)^{-1}, & \text{אם } (l+1)^{-1} \leq \bar{\beta} \leq 1 \\ n\bar{r}, & \text{אם } 0 < \bar{\beta} < (l+1)^{-1}, \end{cases}$$

$$B^2 \sim h \begin{cases} n \left(\sigma_n^{(r)}\right)^{-1}, & \text{אם } 0 \leq \beta \leq (l+1)^{-1} \\ nr, & \text{אם } (l+1)^{-1} < \beta < 1. \end{cases}$$

-1

$$\bar{s}_3 \sim h \frac{(\bar{B}^2)^2}{n}, \quad s_3 \sim h \frac{(B^2)^2}{n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

הוכחה: מתקיים,

$$\begin{aligned} \bar{B}_n^2 = \bar{s}_2 &\sim \sum_{j=1}^{\bar{r}} j^{l+1} e^{-j\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}} \\ &\sim \left(|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|\right)^{-(l+2)} \int_{|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|}^{r|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|} t^{l+1} \exp\left(-t \operatorname{sign}(\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})})\right) dt. \end{aligned} \quad (49)$$

תחילה נתבונן במקרה $1 \leq \bar{\beta} \leq (l+1)^{-1}$. מ-(49),

$$\bar{B}_n^2 \sim \left(\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}\right)^{-(l+2)} \int_0^{h_1} t^{l+1} \exp(-t) dt,$$

כש-

$$h_1 = \begin{cases} \left(\Gamma(l+1)\right)^{\frac{1}{l+1}}, & \text{אם } \bar{\beta} = (l+1)^{-1} \\ \infty, & \text{אם } \bar{\beta} > (l+1)^{-1}. \end{cases}$$

כתוצאה מכך,

$$\bar{B}_n^2 \sim hn \left(\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}\right)^{-1}.$$

באופן דומה מתקבלות שאר הטענות המסקנה.
הערה: נקודות קריטיות ומעבר פזה.

ניתוח תוצאות הלמה מראה שההתנהגות האסימפטוטית של הפרמטר σ כפונקציה של $r = n^\beta$ משתנה באופן מהותי כש- β עובר דרך נקודה $\frac{1}{l+1}$, $l > 0$, במילים אחרות, $\beta = \frac{1}{l+1}$ היא נקודת קפיצה של הפונקציה $\sigma_n = \sigma_n(\beta)$, עבור n גדול. במדעי טבע לנקודות מסוג זה קוראים נקודות קריטיות (= *Critical Points*) של מודל.

בפרט, בפיזיקה סטטיסטית נהוג לומר שבמודל מתרחש מעבר פזה (= *Phase Transition*). בהמשך נראה השפעתה הנקודה הקריטית הנ"ל על תמונת ההתקבצות החלוקות הנוצרות ע"י המודל. משפט גבול לוקלי.

יהיו $\sigma_n^{(r)}$, $\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}$ כמו בלמה. אזי מתקיים:

$$P(V_n^{(r)} = n) \sim (2\pi B_n^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$P(\bar{V}_n^{(\bar{r})} = n) \sim (2\pi \bar{B}_n^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

הוכחה: ראינו ש-

$$P(\bar{V}_n^{(\bar{r})} = n) = \int_0^1 \phi^{(\bar{r})}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha,$$

כאשר הפונקציה אופיינית $\phi^{(\bar{r})}$ במקרה של אספים נתונה ע"י

$$\phi^{(\bar{r})}(\alpha) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\bar{r}} a_j e^{-j\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}} (e^{2\pi i \alpha j} - 1)\right), \quad \alpha \in R.$$

בהסתמך על כך שהפונקציה $\phi^{(\bar{r})}$ מחזורית עם מחזור שווה ל-1,

$$P(\bar{V}_n^{(\bar{r})} = n) = \int_{-1/2}^{1/2} \phi^{(\bar{r})}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha :=$$

$$\bar{T}_1(n) + \bar{T}_2(n), \quad n \geq 1,$$

כאשר אנו סימנו

$$\bar{T}_1 = \bar{T}_1(n) = \int_{-\bar{\alpha}_0(n)}^{\bar{\alpha}_0(n)} \phi^{(\bar{r})}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha,$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_2 = \bar{T}_2(n) &= \int_{-1/2}^{-\bar{\alpha}_0(n)} \phi^{(\bar{r})}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha + \\ &\int_{\bar{\alpha}_0(n)}^{1/2} \phi^{(\bar{r})}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha. \end{aligned}$$

לפי המסקנה מלמה, מתקיים תנאי לפונוב:

$$\frac{\bar{s}_3}{\bar{B}^3} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

עתה נרשום

$$\bar{\alpha}_0 \bar{s}_3 = (\bar{\alpha}_0 \bar{B})^3 \frac{\bar{s}_3}{\bar{B}^3}$$

כדי להסיק מסקנה שקיים $\bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}_0(n)$ כך ש-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\alpha}_0 \bar{B} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\alpha}_0^3 \bar{s}_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\bar{T}_1 \sim \int_{-\bar{\alpha}_0}^{\bar{\alpha}_0} \exp(-2\pi^2 \alpha^2 \bar{B}^2) d\alpha =$$

$$\frac{1}{2\pi \bar{B}} \int_{-2\pi \bar{\alpha}_0 \bar{B}}^{2\pi \bar{\alpha}_0 \bar{B}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi \bar{B}^2}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

כעת נציין דרך הוכחה ש- $\bar{T}_2 = o(\bar{T}_1)$, $n \rightarrow \infty$ מתקיים:

$$|\bar{T}_2| = 2 \left| \int_{\bar{\alpha}_0}^{1/2} \phi^{(\bar{r})}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha n} d\alpha \right|.$$

$$|\bar{\varphi}^{(\bar{r})}(\alpha)| = \exp \left(-2 \sum_{j=1}^{\bar{r}} a_j e^{-j\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}} \sin^2 \pi \alpha j \right), \quad \alpha \in R.$$

$$\bar{V}_n^{(\bar{r})}(\alpha) = 2 \sum_{j=1}^{\bar{r}} a_j e^{-j\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}} \sin^2 \pi \alpha j, \quad \bar{\alpha}_0 \leq \alpha \leq 1/2.$$

קל לודא ש-

$$\bar{\alpha}_0^2 = \frac{\log^4(\bar{B}^2)}{\bar{B}^2},$$

מקיים תנאי לפונוב. ניתן להוכיח שעבור בחירת ה- $\bar{\alpha}_0$ הנ"ל,

$$e^{-\bar{V}_n^{(\bar{r})}(\alpha)} = o(\bar{B}^{-1}), \quad \bar{\alpha}_0 \leq \alpha \leq 1/2, \quad n \rightarrow \infty. \Rightarrow$$

$$\bar{T}_2 = o(\bar{T}_1), \quad n \rightarrow \infty.$$

את טענת המשפט עבור $P(V_n^{(r)} = n)$ מוכיחים בדרך דומה. מ.ש.ל.
מסקנה: נוסחאות אסימפטוטיות עבור $c_n^{(r)}, \bar{c}_n^{(\bar{r})}$.
יהיו $r = n^\beta, 0 < \beta \leq 1$ ו- $\bar{r} = n^{\bar{\beta}}, 0 \leq \bar{\beta} \leq 1$ אזי

$$c_n^{(r)} \sim (2\pi B^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left(S_n^{(r)}(e^{-\sigma_n^{(r)}}) + n\sigma_n^{(r)} \right), \quad n \rightarrow \infty,$$

(50),

$$\bar{c}_n^{(\bar{r})} \sim (2\pi \bar{B}^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left(\bar{S}_n^{(\bar{r})}(e^{-\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}}) + n\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} \right), \quad n \rightarrow \infty,$$

(51)

כאשר

$$S_n^{(r)}(e^{-\sigma_n^{(r)}}) \sim h \frac{n^2}{B^2}, \quad (52)$$

$$\bar{S}_n^{(\bar{r})}(e^{-\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}}) \sim h \frac{n^2}{\bar{B}^2}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (53).$$

הוכחה: הנוסחאות (50), (51) מתקבלות ממשפט הגבול הלוקלי ומהצגות *Khintchine*, בעוד ש-(52), (53) מתקבלות בעזרת נוסחת סכמה של *Euler*. אמנם,

$$\bar{S}_n^{(\bar{r})}(e^{-\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}}) \sim$$

$$\left(|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}| \right)^{-l} \int_{|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|}^{r|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|} t^{l-1} \exp \left(-t \operatorname{sign}(\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}) \right) dt :=$$

$$\left(|\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|\right)^{-l} \bar{I}_n(l-1)$$

$$S_n^{(r)}(e^{-\sigma_n^{(r)}}) \sim$$

-1

$$\begin{aligned} & \left(|\sigma_n^{(r)}|\right)^{-l} \int_{r|\sigma_n^{(r)}|}^{n|\sigma_n^{(r)}|} t^{l-1} \exp\left(-t \operatorname{sgn}(\sigma_n^{(r)})\right) dt := \\ & \left(|\sigma_n^{(r)}|\right)^{-l} I_n(l-1). \end{aligned}$$

מזה נובע ש-

$$\frac{\bar{S}_n^{(\bar{r})}(e^{-\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}})}{n} \sim \bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} \frac{\bar{I}_n(l-1)}{\bar{I}_n(l)}$$

-1

$$\frac{S_n^{(r)}(e^{-\sigma_n^{(r)}})}{n} \sim \sigma_n^{(r)} \frac{I_n(l-1)}{I_n(l)}.$$

נתבונן במקרה $0 < \bar{\beta} < (l+1)^{-1}$. לפי למה, במקרה הזה,

$$\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} < 0, \quad |\bar{r}\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}| \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

לכן,

$$\frac{\bar{I}_n(l-1)}{\bar{I}_n(l)} \sim \frac{|\bar{r}\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|^{l-1}}{|\bar{r}\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}|^l} \Rightarrow$$

$$\frac{\bar{S}_n^{(\bar{r})}(e^{-\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}})}{n} \sim \frac{1}{\bar{r}} \Rightarrow$$

$$\bar{S}_n^{(\bar{r})}(e^{-\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}}) \sim \frac{n^2}{n\bar{r}} \sim h \frac{n^2}{B^2},$$

כאשר המעבר האחרון נובע ממסקנה מלמה. באותה דרך מוכיחים את הטענה בשאר המקרים.

בעזרת התוצאות הקודמות אפשר כעת לגשת לחקר אסימטוטיקת ההסתברויות

$$\bar{d}_n^{(\bar{r})} := P(\bar{q}_n \leq \bar{r}) = \frac{\tilde{c}_n^{(\bar{r})}}{\tilde{c}_n}$$

-1

$$d_n^{(r)} := P(q_n \geq r) = \frac{\tilde{c}_n^{(r)}}{\tilde{c}_n}.$$

משפט על ההתקבצות המסה.
במקרה של אספים *Expansive* מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}_n^{(\bar{r})} = \begin{cases} 0, & \text{אם } 0 \leq \bar{\beta} \leq (l+1)^{-1} \\ 1, & \text{אם } (l+1)^{-1} < \bar{\beta} \leq 1. \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n^{(r)} = \begin{cases} 0, & \text{אם } r = n^\beta, \quad 0 < \beta \leq 1 \\ \exp\left(-\sum_{j=1}^{r-1} a_j\right), & \text{אם } r \geq 2 \text{ יפוס רפסמ.} \end{cases}$$

הוכחה: נציין ש- $\tilde{c}_n = \tilde{c}_n^{(\bar{n})}$. ונגדיר

$$\Delta_n^{(\bar{r})} := \bar{S}_n^{(\bar{r})} \left(e^{-\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}} \right) - \bar{S}_n^{(n)} \left(e^{-\bar{\sigma}_n^{(n)}} \right) + n \left(\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} - \bar{\sigma}_n^{(n)} \right).$$

מטרתנו הראשונה היא להראות ש-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n^{(\bar{r})} = \begin{cases} -\infty, & \text{אם } 0 < \bar{\beta} \leq (l+1)^{-1} \\ 0, & \text{אם } (l+1)^{-1} < \bar{\beta} \leq 1. \end{cases} \quad (54).$$

החלק הראשון של (54) נובע ישירות מהאנליזה האסימפטוטית הקודמת. אמנם, במקרה הזה,

$$\bar{S}_n^{(\bar{r})} \left(e^{-\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}} \right) \sim h \frac{n^2}{B^2} \sim h_1 n^{1-\bar{\beta}}, \quad 0 < \bar{\beta} \leq (l+1)^{-1}$$

-1

$$n \bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} \sim n \left(-\frac{\bar{\gamma} \log n}{n^{\bar{\beta}}} (1 + \bar{\delta}_n) \right) \sim$$

$$-hn^{1-\bar{\beta}} \log n \rightarrow -\infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

כאשר $0 < \bar{\beta} < \frac{1}{l+1}$. בעוד ש-

$$\bar{S}_n^{(n)} \left(e^{-\bar{\sigma}_n^{(n)}} \right) \sim h \frac{n^2}{B^2} \sim h \frac{n^2}{n \left(\bar{\sigma}_n^{(\bar{n})} \right)^{-1}} \sim h_2 n^{1-\frac{1}{l+1}}$$

-1

$$n \bar{\sigma}_n^{(\bar{n})} \sim hn^{1-\frac{1}{l+1}}.$$

כתוצאה מכך מקבלים:

$$\Delta_n^{(\bar{r})} \sim -hn^{1-\bar{\beta}} \log n \rightarrow -\infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

כאשר $0 < \bar{\beta} < \frac{1}{l+1}$ במקרה $\bar{\beta} = \frac{1}{l+1}$, דבר מיוחד הוא ש-

$$\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} \sim \bar{A}n^{-\frac{1}{l+1}}, \quad \bar{\sigma}_n^{(n)} \sim hn^{-\frac{1}{l+1}},$$

כך שכדי לגלות ההתנהגות אסימפטוטית של $n \left(\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} - \bar{\sigma}_n^{(n)} \right)$ צריך לקחת בחשבון את הקבוע-ים \bar{A}, h , לפי למה,

$$\bar{A}^{l+1} = \int_0^{\bar{A}} t^l e^{-t} dt < \Gamma(l+1).$$

לכן,

$$\bar{A} < h = \left(\Gamma(l+1) \right)^{\frac{1}{l+1}} \Rightarrow$$

$$n\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} - n\bar{\sigma}_n^{(n)} \rightarrow -\infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

באותו אופן מוכיחים שגם

$$\bar{S}_n^{(\bar{r})} \left(e^{-\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}} \right) - \bar{S}_n^{(n)} \left(e^{-\bar{\sigma}_n^{(n)}} \right) \rightarrow -\infty.$$

חשוב לציין שבמהלך ההוכחה קיבלנו שבמקרה $0 < \bar{\beta} \leq \frac{1}{l+1}$ ש-

$$\Delta_n^{(\bar{r})} \leq -n^\gamma,$$

עם $\gamma > 0$ מסויים. מזה נובע חלק ראשון של טענת המשפט עבור $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}_n^{(\bar{r})}$, בשל העובדה $\bar{B}_n^{(\bar{r})} \sim hn^\gamma, \gamma > 0$ במקרה המתאים לחלק השני של (54),

$$\bar{\sigma}_n^{(n)} \sim \bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}, \quad n \rightarrow \infty,$$

ומשום כך

$$\bar{S}_n^{(\bar{r})} \left(e^{-\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}} \right) \sim \bar{S}_n^{(n)} \left(e^{-\bar{\sigma}_n^{(n)}} \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

משום כך כאן יש צורך באנליזה יותר עדינה. מהשיויון

$$\sum_{j=1}^{\bar{r}} j a_j e^{-\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} j} - \sum_{j=1}^n j a_j e^{-\bar{\sigma}_n^{(n)} j} = 0, \quad n \geq 1$$

ומלמה נובע ש-

$$n \left(\bar{\sigma}_n^{(n)} - \bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} \right) > 0, \quad \text{וש-}$$

$$n \left(\bar{\sigma}_n^{(n)} - \bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} \right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

אמנם, במקרה שבנידון

$$\begin{aligned} & \left(\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}\right)^{-(l+1)} \int_{\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}}^{r\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}} t^l \exp(-t) dt = \\ & \left(\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}\right)^{-(l+1)} (\Gamma(l+1) - \epsilon_1(n)), \end{aligned}$$

כאשר

$$\begin{aligned} \epsilon_1(n) &= \Gamma(l+1) - \int_{\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}}^{r\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}} t^l \exp(-t) dt \sim \\ & \exp\left(-r\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}\right) \left(r\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}\right)^l, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

לפי כלל לופיטל. משום כך,

$$n^p \epsilon_1(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

עבור כל p

\Rightarrow

$$n\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})} = (\Gamma(l+1))^{\frac{1}{l+1}} n^{\frac{l}{l+1}} + v_{n,1}, \quad v_{n,1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

ובאותו אופן,

$$n\bar{\sigma}_n^{(n)} = (\Gamma(l+1))^{\frac{1}{l+1}} n^{\frac{l}{l+1}} + v_{n,2}, \quad v_{n,2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

זה מוכיח את הטענה. בעזרת אותם נימוקים מוכיחים ש-

$$\bar{S}_n^{(\bar{r})} \left(e^{-\bar{\sigma}_n^{(\bar{r})}} \right) - \bar{S}_n^{(n)} \left(e^{-\bar{\sigma}_n^{(n)}} \right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

בסיכומו של דבר מתקבלת הטענה השניה של המשפט לגבי $\bar{d}_n^{(\bar{r})}$. עתה נתאר דרך החוכמה טענת המשפט לגבי $d_n^{(r)}$. יהי $r \geq 2$ מספר סופי נתון כלשהו. אזי

$$\sigma_n^{(r)} \sim \sigma_n^{(1)}, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sigma_n^{(r)} - \sigma_n^{(1)} \right) = 0.$$

בהמשך נרשום

$$S_n^{(r)} \left(e^{-\sigma_n^{(r)}} \right) - S_n^{(1)} \left(e^{-\sigma_n^{(1)}} \right) =$$

$$\sum_{j=1}^n a_j e^{-\sigma_n^{(1)} j} \left(e^{-(\sigma_n^{(r)} - \sigma_n^{(1)}) j} - 1 \right) - \sum_{j=1}^{r-1} a_j e^{-\sigma_n^{(r)} j}.$$

(55)

מתקיים, $\sigma_n^{(1)} > \sigma_n^{(r)} \geq 0$ ו-1

$$e^{-(\sigma_n^{(1)} - \sigma_n^{(r)})j} - 1 = -(\sigma_n^{(1)} - \sigma_n^{(r)})j(1 - \delta_n),$$

, כאשר $\delta_n = \delta_n(j) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, באופן אחיד ביחס לכל $1 \leq j \leq n$. משום כך,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n a_j e^{-\sigma_n^{(1)} j} \left(e^{-(\sigma_n^{(r)} - \sigma_n^{(1)})j} - 1 \right) = \\ & - \left((\sigma_n^{(1)} - \sigma_n^{(r)})(1 - \delta_n) \right) \sum_{j=1}^n j a_j e^{-\sigma_n^{(1)} j} = \\ & - \left((\sigma_n^{(1)} - \sigma_n^{(r)})(1 - \delta_n) \right) n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

בעוד שהסכום השני שהוא סכום מספר סופי של איברים שואף ל-

$$\sum_{j=1}^{r-1} a_j$$

.מ.ש.ל.

תמונת ההתקבצות: אספים, $l > 0$

- התנהגות של $\sigma_n^{(r)}, \bar{\sigma}_n^{(r)}$. יהיו $\bar{r} = n^{\bar{\beta}}, r = n^{\beta}$ נקפא את n מספיק גדול ונתבונן בהתנהגות של σ -ות כפונקציות של β בלבד. ראינו ש-

$$\frac{1}{l+1}$$

היא נקודה קריטית של הפרמטר β .

ניתוח תוצאות המשפט.

המשפט מראה שבהתנהגות ההסתברויות

$$\bar{d}_n^{(\bar{r})} := P(\bar{q}_n \leq \bar{r})$$

-1

$$d_n^{(r)} := P(q_n \geq r)$$

כמו כן מתרחש מעבר פזה ביחס לפרמטר β באותה נקודה

$$\frac{1}{l+1}$$

. ממשפט נובע שעבור n מספיק גדול

(i) ההסתברות שבחלוקה של n יהיה רכיב (=קבוצה) בגודל $n^{\frac{1}{l+1}}$ שווה ל-0, לפי הגדרת פונקציה התפלגות;

(ii) עבור כל p סופי נתון, המ.א. $K_1^{(n)}, \dots, K_p^{(n)}$ הם בלתי תלויים ומפולגים $Po(a_j), j = 1, \dots, p$, בהתאמה.

לאור זה, המספר $n^{\frac{1}{l+1}}$ נקרא $Threshold$ =סף עבור גודל הקבוצה.